

Kolokwium 1/2

Zadanie 1 (3 pkt). Dla ustalonej liczby całkowitej dodatniej n , niech X oznacza zmienną losową określającą liczbę punktów stałych losowej permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$. Oblicz $\text{Var}(X)$.

Zadanie 2 (4 pkt). Rozważmy symetryczny spacer losowy po liczbach naturalnych, w którym startujemy w 1, a 0 jest jedyną barierą odbijającą. Niech X będzie zmienną losową oznaczającą liczbę wizyt w 0 przed pierwszą wizytą w 666. Udowodnij, że

$$P(X \geq 2024) < 0,25.$$

Zadanie 3 (3+1 pkt). Niech $n \in \mathbb{N}_1$, niech $p \in (0, 1)$ i niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie dwumianowym z parametrami n i p . Dla ustalonego parametru $N \in \mathbb{N}_1$, oblicz $P(X = k \mid X + Y = N)$ dla każdego $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ oraz $E(X \mid X + Y = N)$.

Zadanie 4 (2+2 pkt). W fabryce Świętego Mikołaja pracowity elf układa w rzędzie n ($n \geq 1$) magnesów sztabkowych. Każdy magnes ma dwa bieguny północny i południowy. Orientacja każdego magnesu w rzędzie jest losowa i niezależna od pozostałych. Dwa sąsiednie magnesy są złączone, tylko jeśli stykają się przeciwnymi biegunami (w przeciwnym przypadku się odpychają). Niech X będzie zmienną losową określającą liczbę powstałych bloków magnesów. Oblicz $E(X)$ oraz $\text{Var}(X)$.

Zadanie 5 (3 pkt). W wyborach, w których jest dwóch kandydatów i papierowe karty do głosowania, każdy głos jest błędnie policzony niezależnie, z prawdopodobieństwem $p = 0,02$. Zastosuj nierówność Czernowa do oszacowania prawdopodobieństwa, że więcej niż 4% głosów zostało błędnie policzonych w wyborach, w których zgromadzono 10^6 kart do głosowania. Udowodnij, że otrzymana wartość jest mniejsza od e^{-2024} .

Zadanie 6 (4 pkt). Niech n będzie dostatecznie dużą liczbą naturalną. Niech $m = n \ln n - 2024n$ i niech M będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem m . Rozważ problem wrzucania M kul do n urn i oblicz $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\text{„żadna urna nie jest pusta”})$.

Zadanie 7 (1+2+2 pkt). Niech (Ω, Σ) będzie przestrzenią mierzalną z miarą μ i niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną.

- (i) Niech (Ω', Σ') będzie przestrzenią mierzalną, niech $g, g' : \Omega \rightarrow \Omega'$, niech $A \in \Sigma$ i niech funkcja $h : \Omega \rightarrow \Omega'$ będzie zdefiniowana dla każdego $x \in \Omega$ następująco:

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & \text{jeśli } x \in A \\ g'(x), & \text{jeśli } x \notin A \end{cases}.$$

Udowodnij, że jeśli g i g' są mierzalne to h jest mierzalna.

- (ii) Udowodnij, że funkcja $|f|$ jest mierzalna.

- (iii) Udowodnij, że $|\int_{\Omega} f d\mu| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu$.

Zadanie 8 (2+3 pkt). Rozważ klasyczną szachownicę 8×8 .

- (i) W lewym dolnym rogu szachownicy ustawiamy wieżę. Rozważ łańcuch Markowa $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modelujący proces w którym w każdym kroku przesuwamy wieżę (nie może stać w miejscu) na jedno z pól w tej samej linii pionowej lub poziomej. Jaka jest oczekiwana liczba kroków, w których wieża dotrze do prawego górnego rogu szachownicy?
- (ii) W lewym dolnym rogu szachownicy ustawiamy gońca. Rozważ łańcuch Markowa $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, w którym w każdym kroku przesuwamy gońca (nie może stać w miejscu) na jedno z pól na którejś z dwu przekątnych przechodzących przez aktualną pozycję gońca. Czy ten łańcuch ma rozkład stacjonarny? Wyznacz szansę, że w losowej chwili w przyszłości goniec będzie stał na swojej wyjściowej pozycji (w lewym dolnym rogu), czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n = \text{„lewy dolny róg”})$.

Zadanie 9 (4 pkt). Niech G będzie grafem. Pozdbiór wierzchołków U grafu G jest *zbiorem niezależnym* jeśli żadne dwa wierzchołki w U nie mają krawędzi w G . Niech $\alpha(G)$ będzie największą wielkością zbioru niezależnego w G . Dla dowolnego wierzchołka v w G , niech $d(v)$ będzie stopniem v w G . Udowodnij, że $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} 1/(d(v) + 1)$.

WSKAZÓWKA: Rozważ algorytm zachłanny konstruujący zbiór niezależny w G wzdłuż losowej permutacji wierzchołków G .

Zadanie 10 (1+2+1 pkt). Rozważmy czas mierzony dyskretnie w momentach $n \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech Y_n oznacza liczbę nowo powstałych gwiazd we wszechświecie w momencie n . Załóżmy, że $\{Y_n : n \in \mathbb{N}\}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrem λ . Czasy życia gwiazd są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym z parametrem p (gwiazdy nigdy nie umierają w tej samej chwili, w której powstają). Dla każdego $n \in \mathbb{N}$, niech X_n będzie zmienną losową oznaczającą liczbę gwiazd w momencie n po uwzględnieniu narodzin i śmierci w momencie n .

- (i) Czy $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest łańcuchem Markowa?
- (ii) Oblicz rozkład X_n dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) Rozważ, zmienną losową X taką, że dla każdego $P(X = k) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k)$. Jaki ma rozkład zmienna X ? Czym jest ten rozkład dla rozważanego procesu $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$?

Zadanie 11 (4 pkt bonusowe). Rozważmy wariant problemu kolekcjonera kuponów. Kupon-y zbierane są w próbach, które numerujemy kolejnymi liczbami z $\mathbb{N}_1$. Tym razem jednak w jednej próbie możemy zebrać więcej niż jeden kupon. Dla $i \in \mathbb{N}_1$, niech Y_i będzie zmienną losową określającą liczbę kuponów zebranych w i -tej próbie. Wiemy, że $Y_i \geq 1$, $E(Y_i) = 2$ dla każdego $i \in \mathbb{N}_1$, oraz że zmienne $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}_1}$ są niezależne. Każdy zebrany kupon jest jednego z n typów. Dla każdego zebranego kuponu jego typ jest zawsze losowany jednostajnie po wszystkich n typach i niezależnie od wszystkich innych losowań. Niech X będzie liczbą prób do zebrania wszystkich n typów kuponów. Wyznacz jak najlepsze dolne oszacowanie asymptotyczne na $E(X)$.

Powodzenia.