

Kolokwium 1/2 (Poprawione)

Wersja z usuniętym Zadaniem 6.

Zadanie 1 (3 pkt). Dla ustalonej dodatniej liczby naturalnej n , niech α i β będą dwiema losowymi permutacjami zbioru $[n]$ wybranymi niezależnie. Oblicz

- (i) (1 pkt) $E[|\{i \in [n] \mid \alpha(\beta(i)) = i\}|]$,
- (ii) (1 pkt) $E[|\{i \in [n] \mid \alpha(i) = i \text{ oraz } \beta(i) = i\}|]$,
- (iii) (1 pkt) $E[|\{i \in [n] \mid \alpha(i) > \beta(i)\}|]$.

Zadanie 2 (2 pkt). Niech N i n będą dodatnimi liczbami naturalnymi takimi, że $2N \geq n$. W pojemniku znajduje się $2N$ kart skojarzonych w N par. Wyciągamy losowo n kart z pojemnika. Oblicz wartość oczekiwaną liczby wyciągniętych par.

Zadanie 3 (3 pkt). Dla ustalonej dodatniej liczby naturalnej n , niech α będzie losową permutacją zbioru $[n]$. Dla liczb naturalnych i, j takich, że $1 \leq i \leq j \leq n$, przedział $[i, j]$ jest *segmentem* w α , jeśli $\alpha(i) < \dots < \alpha(j)$. Niech X będzie liczbą maksymalnych (w sensie inkluzji) segmentów w α . Wyznacz $E[X]$ oraz $\text{Var}[X]$.

Zadanie 4 (4 pkt). Niech X będzie liczbą wykonanych rzutów sprawiedliwą monetą do otrzymania dwóch orłów z rzędu. Wyznacz $E[X]$ i $\text{Var}[X]$.

Zadanie 5 (4 pkt). Rozważmy symetryczny spacer losowy po liczbach całkowitych ze zbioru $\{0, \dots, 2025\}$. Startujemy w 1364, a zatrzymujemy się po pierwszym uderzeniu w 0 lub 2025. Niech X będzie największą wartością, jaką odwiedził spacer. Wyznacz rozkład zmiennej X .

Zadanie 7 (4 pkt). Pewien wędrowiec wybiera się na szczyt górski o wysokości 2025 metrów. Startując z poziomu 0, ruch wędrowca jest sekwencją losowych akcji. Każda akcja może być wejściem o 1 metr wyżej z prawdopodobieństwem p , pozostaniem na tej samej wysokości z prawdopodobieństwem q , lub spadkiem do poziomu 0 z prawdopodobieństwem r , gdzie $p, r > 0$, $q \geq 0$ i $p + q + r = 1$.

- (i) (1 pkt) Oblicz prawdopodobieństwo, że wędrowiec nigdy nie dotrze na górę.
- (ii) (1.5 pkt) Wyznacz wartość oczekiwaną liczby kroków do osiągnięcia szczytu, gdy $q = 0$.
- (iii) (1.5 pkt) Wyznacz wartość oczekiwaną liczby kroków do osiągnięcia szczytu, gdy $q > 0$.

Zadanie 8 (4 pkt). U podnóża góry o wysokości 2025 metrów pojawiły się grupy X Prometeuszów, Y Tantalów oraz Z Syzyfów, gdzie X, Y i Z są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona z parametrami, odpowiednio, 26, 11 i 2025. Każdy Prometeusz, Tantal i Syzyf ma za zadanie wtoczyć głaz na wysokość odpowiednio 26, 11 oraz 2025 metrów. Zakładamy, że szansa na przesunięcie głazu z poziomu $j - 1$ na j ma prawdopodobieństwo $1/2$ dla $j \in [2025]$ i każda próba jest niezależna od pozostałej. Ponadto, jeżeli przedstawiciel danej grupy nie podoła swojemu zadaniu, to niknie w czeluściach Tartaru. Niech X', Y' i Z' oznaczają odpowiednio liczbę Prometeuszy, Tantalów i Syzyfów, którzy podołali swoim zadaniom. Oblicz

- (i) (1 pkt) prawdopodobieństwo, że zadanie zostało wykonane przynajmniej przez jedną osobę,
- (ii) (1 pkt) $E(X' + Y' + Z' \mid Z)$
- (iii) (1 pkt) $E(X + Y \mid Y')$,
- (iv) (1 pkt) $E(Z' \mid Z'')$, gdzie Z'' to liczba Syzyfów, którym nie udało się przejść z poziomu 2024 na 2025.

Zadanie 9 (4 pkt). Niech n i d będą dodatnimi liczbami naturalnymi i niech G będzie grafem o n wierzchołkach i co najwyżej $\frac{nd}{2}$ krawędziach. Udowodnij, że G zawiera taki podzbiór U parami niesąsiadujących wierzchołków, że $|U| \geq \frac{n}{2d}$.

Zadanie 10 (3 pkt). Niech Ω będzie zbiorem niepustym. Funkcję $\varphi : 2^\Omega \rightarrow [0, +\infty]$ nazywamy *ciekawą*, gdy spełnia:

- (i) $\varphi(\emptyset) = 0$,
- (ii) $\forall A \subseteq B \subseteq \Omega : \varphi(A) \leq \varphi(B)$,
- (iii) $\forall A_j \subseteq \Omega, j \in \mathbb{N}_+ : \varphi\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) \leq \sum_{j=1}^\infty \varphi(A_j)$.

Zbiór $E \subseteq \Omega$ nazywamy *intrygującym* względem φ , jeśli

$$\forall T \subseteq \Omega : \varphi(T) = \varphi(T \cap E) + \varphi(T \setminus E).$$

Czy rodzina wszystkich zbiorów *intrygujących* względem φ jest σ -algebrą?

Zadanie 11 (3 pkt). Rzucamy niezależnie 425 razy monetą jednozłotową, 150 razy dwuzłotową oraz 40 razy pięciozłotową. Za każdym razem, gdy wypada orzeł, zdobywamy monetę. Niech X będzie sumą zarobionych pieniędzy. Korzystając z nierówności Czebyszewa, oszacuj $P(|X - E(X)| \geq 45)$.

Zadanie 12 (3 pkt). Niech prawdopodobieństwo, że niedziela jest dniem słonecznym, wynosi $7/10$, zaś prawdopodobieństwo, że inny dzień jest słoneczny, wynosi $7/40$. Oszacuj prawdopodobieństwo za pomocą funkcji malejącej wykładniczo względem n , że w ciągu $7n$ dni przynajmniej $1/3$ z nich będzie słonecznych.

Powodzenia.