igła Buffona

Igłę długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości d, przy czym $\ell \leqslant d$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

igła Buffona

Igłę długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości d, przy czym $\ell \leqslant d$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

Niezależne zmienne:
Z – odległość środka igły do najbliższej krawędzi *w dół*
α – kąt wyznaczony przez igłę i wyznaczoną krawędź między deskami

$$f(z) = \frac{1}{d} \text{ dla } z \in [0, d], \quad f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \text{ dla } \alpha \in [0, \pi], \quad f(z, \alpha) = \frac{1}{d\pi}.$$

igła Buffona

Igłę długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości d, przy czym $\ell \leqslant d$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

Niezależne zmienne:
Z – odległość środka igły do najbliższej krawędzi *w dół*
α – kąt wyznaczony przez igłę i wyznaczoną krawędź między deskami

$$f(z) = \frac{1}{d} \text{ dla } z \in [0, d], \quad f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \text{ dla } \alpha \in [0, \pi], \quad f(z, \alpha) = \frac{1}{d\pi}.$$

$B = \{(z, \alpha) : \ z \leqslant \frac{\ell}{2} \sin \alpha \text{ lub } d - z \leqslant \frac{\ell}{2} \sin \alpha\}$

igła Buffona

Igłę długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości d, przy czym $\ell \leqslant d$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie krawędź deski?

Niezależne zmienne:
Z – odległość środka igły do najbliższej krawędzi *w dół*
α – kąt wyznaczony przez igłę i wyznaczoną krawędź między deskami

$$f(z) = \frac{1}{d} \text{ dla } z \in [0, d], \quad f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \text{ dla } \alpha \in [0, \pi], \quad f(z, \alpha) = \frac{1}{d\pi}.$$

$$B = \{(z, \alpha) : \ z \leqslant \tfrac{\ell}{2} \sin \alpha \text{ lub } d - z \leqslant \tfrac{\ell}{2} \sin \alpha\}$$

$$\mathrm{P}(\text{igła przetnie krawędź}) = \int\int_B f(z, \alpha)\, dz\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{d\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{\frac{\ell}{2}\sin\alpha} dz + \int_{d-\frac{\ell}{2}\sin\alpha}^{d} dz \right) d\alpha = \frac{\ell}{d\pi} \int_0^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\ell}{d}.$$

igła Buffona: długa igła

A co jeśli $\ell > d$?

igła Buffona: długa igła

A co jeśli $\ell > d$?

Przyjmijmy, że losowany kąt jest w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ wtedy

$$f(z) = \frac{1}{d} \text{ dla } z \in [0, d], \quad f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{ dla } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(z, \alpha) = \frac{2}{d\pi}.$$

igła Buffona: długa igła

A co jeśli $\ell > d$?

Przyjmijmy, że losowany kąt jest w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ wtedy

$$f(z) = \frac{1}{d} \text{ dla } z \in [0, d], \quad f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{ dla } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(z, \alpha) = \frac{2}{d\pi}.$$

Igła przetnie krawędź z prawdopodobieństwem

- $\frac{\ell \sin \alpha}{d}$ dla $l \sin \alpha \leqslant d$,
- 1 w.p.p.

igła Buffona: długa igła

A co jeśli $\ell > d$?

Przyjmijmy, że losowany kąt jest w przedziale $[0, \frac{\pi}{2}]$ wtedy

$$f(z) = \frac{1}{d} \text{ dla } z \in [0, d], \quad f(\alpha) = \frac{2}{\pi} \text{ dla } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad f(z, \alpha) = \frac{2}{d\pi}.$$

Igła przetnie krawędź z prawdopodobieństwem

- $\frac{\ell \sin \alpha}{d}$ dla $l \sin \alpha \leqslant d$,
- 1 w.p.p.

$$\mathrm{P}(\text{igła przetnie krawędź}) = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\arcsin \frac{d}{\ell}} \frac{l \sin \alpha}{d}\, d\alpha + \int\limits_{\arcsin \frac{d}{\ell}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\ell}{d}[-\cos\alpha]_0^{\arcsin \frac{d}{\ell}} + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{d}{\ell}\right)\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\ell}{d}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{\ell^2}}\right) - \arcsin \frac{d}{\ell}\right)$$

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Dowód z Księgi dla krótkiej igły: $\ell \leqslant d$.

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Dowód z Księgi dla krótkiej igły: $\ell \leqslant d$.

$$\mathrm{P}(\text{igła przetnie krawędź}) = \mathrm{E}(\text{liczba przecięć}).$$

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Dowód z Księgi dla krótkiej igły: $\ell \leqslant d$.

$$\mathrm{P}(\text{igła przetnie krawędź}) = \mathrm{E}(\text{liczba przecięć}).$$

Niech $\mathrm{E}(\ell)$ będzie oczekiwaną liczbą przecięć dla igły długości ℓ. Z liniowości wartości oczekiwanej

$$\mathrm{E}(x+y) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y),$$

czyli nie ma znaczenia czy rzucamy prostą igłą długości $x+y$ czy dwoma niezależnymi kawałkami, czy też łamaną.

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Dowód z Księgi dla krótkiej igły: $\ell \leqslant d$.

$$\mathrm{P}(\text{igła przetnie krawędź}) = \mathrm{E}(\text{liczba przecięć}).$$

Niech $\mathrm{E}(\ell)$ będzie oczekiwaną liczbą przecięć dla igły długości ℓ. Z liniowości wartości oczekiwanej

$$\mathrm{E}(x + y) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y),$$

czyli nie ma znaczenia czy rzucamy prostą igłą długości $x + y$ czy dwoma niezależnymi kawałkami, czy też łamaną.

W szczególności

$$\mathrm{E}(\ell) = \ell \cdot \mathrm{E}(1).$$

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Dowód z Księgi dla krótkiej igły: $\ell \leqslant d$.

$$\mathrm{P}(\text{igła przetnie krawędź}) = \mathrm{E}(\text{liczba przecięć}).$$

Niech $\mathrm{E}(\ell)$ będzie oczekiwaną liczbą przecięć dla igły długości ℓ. Z liniowości wartości oczekiwanej

$$\mathrm{E}(x + y) = \mathrm{E}(x) + \mathrm{E}(y),$$

czyli nie ma znaczenia czy rzucamy prostą igłą długości $x + y$ czy dwoma niezależnymi kawałkami, czy też łamaną.

W szczególności

$$\mathrm{E}(\ell) = \ell \cdot \mathrm{E}(1).$$

Pozostaje obliczyć $\mathrm{E}(1)$ ...

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Jaki kształt igły generuje zawsze tyle samo przecięć?

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Jaki kształt igły generuje zawsze tyle samo przecięć?

Okrąg o średnicy d: zawsze są dokładnie 2 przecięcia!

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Jaki kształt igły generuje zawsze tyle samo przecięć?

Okrąg o średnicy d: zawsze są dokładnie 2 przecięcia!

Zatem rzucamy
C – okrąg o średnicy d
P_n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny wpisany w C
P^n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny opisany na C

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Jaki kształt igły generuje zawsze tyle samo przecięć?

Okrąg o średnicy d: zawsze są dokładnie 2 przecięcia!

Zatem rzucamy
C – okrąg o średnicy d
P_n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny wpisany w C
P^n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny opisany na C

$$\mathrm{E}(P_n) \leqslant \mathrm{E}(C) \leqslant \mathrm{E}(P^n)$$

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Jaki kształt igły generuje zawsze tyle samo przecięć?

Okrąg o średnicy d: zawsze są dokładnie 2 przecięcia!

Zatem rzucamy
C – okrąg o średnicy d
P_n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny wpisany w C
P^n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny opisany na C

$$\mathrm{E}(P_n) \leqslant \mathrm{E}(C) \leqslant \mathrm{E}(P^n)$$
$$|P_n| \cdot \mathrm{E}(1) \leqslant 2 \leqslant |P^n| \cdot \mathrm{E}(1)$$

igła Buffona: jeszcze raz krótka igła

Jaki kształt igły generuje zawsze tyle samo przecięć?

Okrąg o średnicy d: zawsze są dokładnie 2 przecięcia!

Zatem rzucamy
C – okrąg o średnicy d
P_n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny wpisany w C
P^n – wielokąt n-wierzchołkowy foremny opisany na C

$$\mathrm{E}(P_n) \leqslant \mathrm{E}(C) \leqslant \mathrm{E}(P^n)$$
$$|P_n| \cdot \mathrm{E}(1) \leqslant 2 \leqslant |P^n| \cdot \mathrm{E}(1)$$
$$d\pi \mathrm{E}(1) \leqslant 2 \leqslant d\pi \mathrm{E}(1)$$

krzyżyk Buffona

Na płaszczyznę przeciętą równoległymi liniami o odstępie 1 rzucono dwie jednostkowe igły sklejone prostopadle środkami. Niech Z będzie liczbą przecięć tak utworzonego krzyżyka z liniami.
Policz $\mathrm{E}(Z)$ i $\mathrm{var}(Z)$.

Z_1 i Z_2 to liczba przecięć jednej i drugiej igły w krzyżyku (nazwywamy sobie igły)

$$\mathrm{E}(Z) = \mathrm{E}(Z_1) + \mathrm{E}(Z_2) = \frac{4}{\pi}$$

$$\mathrm{E}(Z^2) = \mathrm{E}(Z_1^2) + \mathrm{E}(Z_2^2) + 2\mathrm{E}(Z_1 Z_2) = \frac{4}{\pi} + \ ?$$

krzyżyk Buffona

$$E(Z_1 Z_2) = P(Z_1 Z_2 = 1) = \iint\limits_{0<z<1/2\min(\sin\alpha,\cos\alpha)} \frac{2}{\pi}\, dz\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \min(\sin\alpha, \cos\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \int_0^{\pi/4} \sin\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot [-\cos\alpha]_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathrm{var}(Z) = \frac{4}{\pi} + 2 \cdot \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{4}{\pi}\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$$