Minory i dobre quasi-porządki

Podpodziałem grafu nazywamy każdy graf, który można otrzymać zastępując niektóre krawędzie wyjściowego grafu nowymi ścieżkami łączącymi końce tych krawędzi w taki sposób, że każde dwie z tych ścieżek są rozłączne wierzchołkowo poza końcami. Graf H jest *topologicznym minorem* grafu G, jeżeli G zawiera podgraf izomorficzny do pewnego podpodziału grafu H. Piszemy wtedy $H \prec_{\text{top}} G$.

Rodzinę $\{G_v\}_{v\in V(H)}$ parami rozłącznych spójnych podgrafów G nazywamy *modelem* grafu H w G, jeśli dla dowolnej krawędzi $uv \in E(H)$ istnieje krawędź grafu G łącząca grafy G_u oraz G_v. Graf H jest *minorem* grafu G (równoważnie G *ma* H*-minor*), jeżeli istnieje model H w grafie G. Piszemy wtedy $H \prec G$.

Klasa grafów $\mathcal{G}$ jest *zamknięta na branie minorów*, jeśli dla każdego $G \in \mathcal{G}$ klasa $\mathcal{G}$ zawiera wszystkie minory grafu G.

Zadanie 1.

(i) Wykazać, że jeśli $H \prec_{\text{top}} G$, to $H \prec G$.
(ii) Wykazać, że implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa.
(iii) Wykazać, że jeżeli każdy wierzchołek grafu H ma stopień co najwyżej 3 oraz $H \prec G$, to $H \prec_{\text{top}} G$.

Zadanie 2. Pokazać, że graf H jest minorem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy można otrzymać z G graf izomorficzny do H, wykonując ciąg operacji:

* usunięcie wierzchołka,
* usunięcie krawędzi,
* *kontrakcja* krawędzi, czyli ściągnięcie krawędzi łączącej dwa wierzchołki u i v do jednego wierzchołka, którego sąsiadami są te wierzchołki, które sąsiadują z u lub v.

Zadanie 3. Wykazać, że dla każdego r istnieje stała $c < 1$ taka, że dla dowolnego grafu G, jeśli $|E(G)| > c|V(G)|^2/2$, to G zawiera klikę K_r.

Zadanie 4. Wykazać, że dla dowolnego grafu G, jeśli $|E(G)| > 2^r|V(G)|$, to $K_r \prec G$.

Wskazówka: Rozważyć minimalny minor H grafu G, dla którego $|E(H)| > 2^r|V(H)|$.

Zadanie 5. Wykazać, że dla dowolnego grafu G, jeśli $|E(G)| > 2^{\binom{r}{2}}|V(G)|$, to $K_r \prec_{\text{top}} G$.

Wskazówka: Udowodnić indukcyjnie, że dla każdego $m \leqslant \binom{r}{2}$, jeśli średni stopień wierzchołka w grafie H jest odpowiednio duży, to pewien graf o r wierzchołkach i m krawędziach jest minorem topologicznym H. Rozważyć maksymalny spójny podzbiór U o tej własności, że po ściągnięciu U do pojedynczego wierzchołka nie zmaleje średni stopień wierzchołka.

Relacja binarna $\leqslant$ na zbiorze X jest *quasi-porządkiem*, jeżeli jest zwrotna oraz przechodnia. Jeżeli dodatkowo dla każdego nieskończonego ciągu $x_0, x_1, \ldots$ w X istnieje taka para indeksów i oraz j, że $i < j$ oraz $x_i \leqslant x_j$, to $\leqslant$ jest *dobrym quasi-porządkiem*.

Zadanie 6. Wykazać, że quasi-porządek $\leqslant$ na X jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje nieskończony antyłańcuch w X ani taki nieskończony ciąg $x_0, x_1, \ldots$ w X, że dla wszystkich i zachodzi $x_{i+1} \leqslant x_i$ oraz $x_i \nleqslant x_{i+1}$.

Zadanie 7. Wskazać nieskończoną rodzinę drzew, o tej własności, że żadne drzewo z tej rodziny nie jest izomorficzne do podgrafu żadnego innego drzewa z tej rodziny. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich drzew uporządkowana relacją bycia izomorficznym do podgrafu nie jest dobrym quasi-porządkiem.

Zadanie 8. Wskazać nieskończoną rodzinę grafów o tej własności, że dla dowolnych dwóch grafów w tej rodzinie żaden z nich nie jest minorem topologicznym drugiego. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich grafów uporządkowana relacją $\prec_{\text{top}}$ nie jest dobrym quasi-porządkiem.

Zadanie 9. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) Każda zamknięta na branie minorów klasa grafów $\mathcal{G}$ jest określona przez pewien skończony zbiór $\{H_1, \ldots, H_k\}$ zabronionych minorów, to znaczy taki zbiór, że $\mathcal{G}$ składa się dokładnie z takich grafów G, że żaden graf H_i nie jest minorem G.
(ii) Klasa wszystkich grafów uporządkowana relacją $\prec$ jest dobrym quasi-porządkiem.
(iii) Istnieje przeliczalnie wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów.
(iv) Dla każdej zamkniętej na branie minorów klasy grafów problem przynależności do klasy jest rozstrzygalny.

Uwaga: Warunek (ii) to Twierdzenie o dobrym quasi-porządku, z którego wynika, że wszystkie powyższe warunki są spełnione.

Niech $\leqslant$ będzie quasi-porządkiem na zbiorze X. Dla dowolnych dwóch skończonych podzbiorów $A, B \subseteq X$, piszemy $A \leqslant B$, jeżeli istnieje taka iniekcja $f : A \to B$, że $a \leqslant f(a)$ dla wszystkich $a \in A$. W ten sposób otrzymujemy rozszerzenie quasi-porządku na zbiorze X do quasi-porządku na zbiorze $[X]^{<\omega}$ wszystkich skończonych podzbiorów X.

Zadanie 10. Wykazać, że jeżeli $\leqslant$ jest dobrym quasi-porządkiem na X, to zdefiniowane powyżej rozszerzenie na $[X]^{<\omega}$ też jest dobrym quasi-porządkiem.

Wskazówka: Założyć nie wprost, że w $[X]^{<\omega}$ istnieje ciąg $A_0, A_1, \ldots$, który nie spełnia warunku z definicji. Wybrać taki ciąg, dla którego ciąg rozmiarów $|A_0|, |A_1|, \ldots$ jest najwcześniejszy leksykograficznie. Przeanalizować ciągi $a_0, a_1, \ldots$ oraz $A_0 \smallsetminus \{a_0\}, A_1 \smallsetminus \{a_1\}, \ldots$, gdzie $a_n \in A_n$ są dowolne.