Strukturalna Teoria Grafów

Piotr Micek i Michał Seweryn

Uwaga: Zadania 6, 7, 8, 9 i 10 z zestawu pierwszego są wciąż aktualne. Jednak wyższy priorytet mają zadania dotyczące szerokości drzewiastej.

Dobre quasi-porządki - c.d.

Zadanie 1. Wykazać, że $\prec_{\text{top}}$ na klasie wszystkich drzew jest dobrym quasi-porządkiem.

Wskazówka: Udowodnić dla drzew ukorzenionych. Ograniczyć się do takich zanurzeń topologicznych, które zachowują relację przodek-potomek. Skorzystać z zadania 10 z zestawu 1 oraz wskazówki do niego.

Szerokość drzewiasta

Zadanie 2 (Własność Helly'ego drzew)**.** Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną poddrzew drzewa T, oraz niech $k \geqslant 1$.

(i) Wykazać, że jeżeli każde dwa drzewa w $\mathcal{T}$ mają niepuste przecięcie, to przecięcie wszystkich drzew z $\mathcal{T}$ jest niepuste.
(ii) Wykazać, że jeżeli $\mathcal{T}$ nie zawiera k parami rozłącznych drzew, to istnieje zbiór $k-1$ wierzchołków drzewa T przecinający wszystkie drzewa z $\mathcal{T}$.

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnego grafu G mamy, że $\text{tw}(G)$ równa jest najmniejszej liczbie w takiej, że istnieje drzewo T oraz rodzina poddrzew $(T_v)_{v\in V(G)}$ o następujących własnościach:

(i) każdy węzeł $t \in V(T)$ należy do co najwyżej $w+1$ poddrzew T_u;
(ii) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodzi $T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Zadanie 4. Niech $(T, (V_t)_{t\in V(T)})$ będzie dekompozycją drzewiastą grafu G i niech $X \subseteq V(G)$ indukuje klikę w G. Wykazać, że istnieje $t \in T$ takie, że $X \subseteq V_t$.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $H \prec G$ to $\text{tw}(H) \leqslant \text{tw}(G)$.

Graf jest *cięciwowy*, jeśli każdy jego cykl długości większej niż 3 ma cięciwę.

Zadanie 6. Wykazać, że graf jest cięciwowy wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje drzewo T oraz rodzina poddrzew $(T_v)_{v\in V(G)}$ o tej własności, że dla dowolnych dwóch różnych wierzchołków $u, v \in V(G)$ mamy $uv \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy gdy $T_u \cap T_v \neq \emptyset$.

Wskazówka: Wykazać, że jeśli graf jest cięciwowy, to jest kliką lub ma separator będący kliką.

Kratą $n \times m$ nazywamy graf, którego wierzchołki są etykietowane parami (i, j), gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ i dwa wierzchołki etykietowane parami (i, j) oraz (i', j') są połączone krawędzią, gdy $|i - i'| + |j - j'| = 1$

Zadanie 7. Wskazać jak najlepsze oszacowanie górne na szerokość drzewiastą następujących grafów: cykl o 10 wierzchołkach, krata 10×10, pełne drzewo binarne o wysokości 10 (i 2047 wierzchołkach), graf pełny K_{10}, graf pełny dwudzielny $K_{10,10}$.

Zadanie 8. Wykazać, że istnieją kraty o dowolnie dużej szerokości drzewiastej.

Zadanie 9. Niech G' będzie podpodziałem grafu G. Rozstrzygnąć, czy jest możliwe, że $\mathrm{tw}(G') > \mathrm{tw}(G)$ lub $\mathrm{tw}(G') < \mathrm{tw}(G)$.

Zadanie 10. Wykazać, że dla każdego grafu G zachodzi $\mathrm{tw}(G) \geqslant \delta(G)$, gdzie $\delta(G)$ jest minimalnym stopniem wierzchołka w G.

Zadanie 11. Wykazać, że jeśli graf G nie zawiera cyklu długości większej niż k, to $\mathrm{tw}(G) \leqslant k - 1$.

Wskazówka: Rozpatrzyć drzewo DFS grafu G.