# Głębokość drzewiasta, szerokość ścieżkowa, sumowanie wzdłuż klik i wiry

*Głębokością drzewiastą* grafu $G$, oznaczaną przez $\mathrm{td}(G)$ nazywamy najmniejszą liczbę $d$ o tej własności, że istnieje ukorzeniony las $F$ taki, że

(i) $V(F) = V(G)$,
(ii) na każdej ścieżce od korzenia do liścia w $F$ leży co najwyżej $d$ wierzchołków,
(iii) dla każdej krawędzi grafu $G$ jeden z jej końców jest przodkiem drugiego w $F$.

*Dekompozycją ścieżkową* grafu $G$ nazywamy taką dekompozycję drzewiastą $(T, \mathcal{B})$, że $T$ jest ścieżką. *Szerokość ścieżkowa* (ang. *pathwidth*) grafu $G$, oznaczana $\mathrm{pw}(G)$, to najmniejsza szerokość dekompozycji ścieżkowej grafu $G$.

Dla każdego grafu $G$ zachodzi

$$\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{pw}(G) \leqslant \mathrm{td}(G) - 1.$$

**Zadanie 1.** Wykazać, że jeśli $H \prec G$, to $\mathrm{td}(H) \leqslant \mathrm{td}(G)$. Wywnioskować, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $d$ klasa grafów o głębokości drzewiastej co najwyżej $d$ jest zamknięta na branie minorów.

**Zadanie 2.** Wykazać, że dla dowolnego grafu $G$ o spójnych składowych $G_1$, $G_2$, $\ldots$, $G_p$ zachodzi:

$$\mathrm{td}(G) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } |V(G)| = 1 \\ 1 + \min_{v \in V(G)} \mathrm{td}(G - v), & \text{jeśli } p = 1 \text{ i } |V(G)| > 1 \\ \max_{i \in \{1,\ldots,p\}} \mathrm{td}(G_i), & \text{jeśli } p > 2. \end{cases}$$

**Zadanie 3.** Kolorowanie wierzchołków grafu $G$ jest *scentrowane* jeśli dla każdego spójnego podgrafu $H$ istnieje wierzchołek w $H$ o unikalnym kolorze spośród wszystkich wierzchołków w $H$. *Scentrowana liczba chromatyczna* $G$ to najmniejsza liczba kolorów potrzebna do scentrowanego pokolorowania $G$. Wykazać, że dla każdego grafu scentrowana liczba chromatyczna równa jest głębokości drzewiastej.

**Zadanie 4.** Wykazać, że ścieżki mają dowolnie dużą głębokość drzewiastą.

**Zadanie 5.** Wykazać, że lasy mają dowolnie dużą szerokość ścieżkową.

**Zadanie 6.** Wykazać, że dla każdego grafu $n$-wierzchołkowego $G$ zachodzi

$$\mathrm{td}(G) \leqslant (\mathrm{tw}(G) + 1)(\log_2 n + 1).$$

**Zadanie 7.** Niech $\mathcal{G}$ będzie zamkniętą na branie minorów klasą grafów. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) istnieje stała $d$ o tej własności, że $\mathrm{td}(G) \leqslant d$ dla wszystkich $G \in \mathcal{G}$.

(ii) istnieje stała $w$ o tej własności, że każdy graf $G \in \mathcal{G}$ ma taką dekompozycję drzewową $(T, \mathcal{B})$ o szerokości co najwyżej $w$, że $T$ ma średnicę co najwyżej $w$.
(iii) $\mathcal{G}$ nie zawiera wszystkich ścieżek.

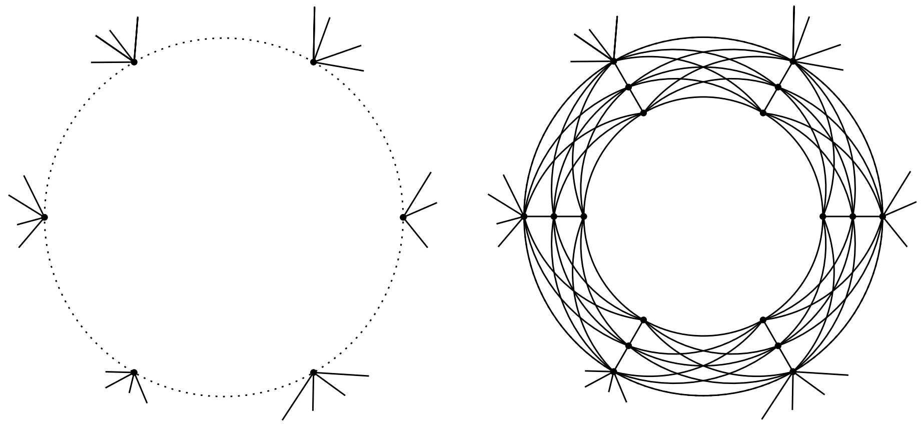
**Zadanie 8.** Niech $\mathcal{G}$ będzie zamkniętą na branie minorów klasą grafów, a $\mathcal{G}^*$ jej domknięciem na sumowanie wzdłuż klik.

(1) Wykazać, że $\mathcal{G}^*$ jest zamknięta na branie minorów
(2) Wykazać, że jeśli $K_n \notin \mathcal{G}$, to $K_n \notin \mathcal{G}^*$.
(3) Wykazać, że jeśli $\mathcal{G}$ jest klasą wszystkich grafów mających co najwyżej $k+1$ wierzchołków, to $\mathcal{G}^*$ jest klasą wszystkich grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej $k$.

**Zadanie 9.** Wykazać, że istnieje stała $c > 0$ taka, że każdy graf planarny o co najwyżej $n$ wierzchołkach jest minorem kraty $cn \times cn$.

*Wskazówka:* Wykazać, że każdy graf planarny jest minorem niedużo większego grafu planarnego mającego cykl Hamiltona.

Niech $G$ będzie grafem zanurzonym w powierzchnię z dziurami $\Sigma$ oraz niech $L$ będzie jedną z dziur. Załóżmy, że na brzegu $L$ leżą wierzchołki $v_{1,1}, v_{2,1}, \ldots, v_{k,1}$, w tej kolejności. Konstruujemy nowy graf $G'$, poprzez dodanie nowych wierzchołków $v_{i,j}$ dla $i \in \{1, \ldots, k\}$, $j \in \{2, \ldots, t\}$ oraz krawędzi między każdą parą różnych wierzchołków $v_{i,j}$, $v_{i',j'}$ gdzie $i' \in \{i-1, i, i+1\}$ (indeksy należy interpretować cyklicznie). Mówimy wówczas, że otrzymany graf $G'$ powstał z $G$ poprzez *dodanie wiru o głębokości* $t$ w dziurę $L$.



Rysunek 1: Dodanie wiru o głębokości 3 do grafu mającego 6 wierzchołków na brzegu dziury.

**Zadanie 10.** Pokazać, że istnieje (i znaleźć jak najmniejsze) $n$ takie, że jeżeli $G$ jest zanurzony w sferę z jedną dziurą (czyli dysk domknięty), to $K_n$ nie jest minorem grafu powstałego z $G$ poprzez dodanie wiru głębokości 2.

*Wskazówka:* Założyć nie wprost, że duża klika jest minorem pewnego grafu tej postaci i rozpatrzyć najmniejszy taki graf. Wykazać, że ma on ograniczoną szerokość drzewiastą.

**Zadanie 11.** Wykazać, że grafy powstałe z grafów planarnych zanurzonych w sferę z dziurami przez dodanie $b$ wirów głębokości co najwyżej $d$ mają minory klik rozmiaru ograniczonego w terminach $b$ i $d$.