

Powierzchnie i zanurzenia grafów

Uwaga: Zadanie 11 z poprzedniego zestawu jest wciąż aktualne i może się przydać w rozwiązaniu najważniejszego zadania z tego zestawu – zadania 7.

Zadanie 1. Wykazać, że jeżeli $t \geq 5$, to każdy rysunek K_t na płaszczyźnie ma $\Omega(t^4)$ przecięć.

Zadanie 2. Wykazać, że dla dowolnej powierzchni nieorientowalnej Σ powierzchnia powstała przez doklejenie skręconej rączki do Σ jest homeomorficzna z powierzchnią otrzymaną przez doklejenie nieskręconej rączki do Σ .

Wskazówka: Przedstawić rozumowanie podobne do tego użytego w lemacie o doklejaniu dwóch wstęg Möbiusa, przedstawionego na wykładzie.

Zadanie 3. Wykazać, że jeżeli graf nieplanarny G jest zanurzony w powierzchnię Σ , to G ma cykl, którego usunięcie nie rozspójnia powierzchni Σ . Wywnioskować, że na powierzchni o genusie Eulera g nie da się zanurzyć więcej niż g rozłącznych grafów nieplanarnych.

Wskazówka: Rozważyć zabronione minory dla grafów planarnych. Jaki jest związek między Σ a powierzchnią powstałą po cięciu Σ wzdłuż nierozspójniającego cyklu?

We wszystkich kolejnych zadaniach zakładamy, że Σ jest powierzchnią o genusie Eulera g . Na wykładzie poznaliśmy twierdzenie, które mówi, że jeśli graf (prosty) G zanurzony w Σ jest triangulacją o f ścianach, to $|V(G)| - |E(G)| + f = 2 - g$.

Zadanie 4. Uogólnić twierdzenie z wykładu pokazując, że jeżeli multigraf G da się zanurzyć w Σ tak, że jest f ścian (o dowolnej liczbie boków), to $|V(G)| - |E(G)| + f = 2 - g$.

Zadanie 5. Udowodnić, że jeżeli G jest grafem (prostym), który da się zanurzyć w Σ , to $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 + 3g$. Wywnioskować, że jeżeli K_t da się zanurzyć w Σ , to $(t-3)(t-4) \leq 6g$.

Zadanie 6. Wskazać zanurzenie grafu K_7 w torus i pokazać, że K_8 nie da się zanurzyć w torus.

Przez $\Sigma(h, c; l)$ oznaczamy powierzchnię z brzegiem powstałą przez wycięcie l dziur w $\Sigma(h, c)$.

Zadanie 7. Wykazać, że istnieje funkcja f , taka, że każdy graf G który da się zanurzyć w $\Sigma(h, c; l)$ ze wszystkimi wierzchołkami na brzegu spełnia $\text{tw}(G) \leq f(h, c, l)$.

Wskazówka: Rozwiązać najpierw zadanie 11 z poprzedniego zestawu.