Piotr Micek i Michał Seweryn

Dualności szerokości drzewiastej i ścieżkowej

Od tej chwili będziemy czasami oznaczać kratę $n \times n$ przez $\boxplus_n$.

Dwa podzbiory wierzchołków $A, B \subseteq V(G)$ *dotykają się*, jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ lub istnieje A-B krawędź. Rodzinę spójnych podzbiorów $V(G)$ takich, że każde dwa się dotykają, nazywamy *jeżyną* w G. Zbiór $X \subseteq V(G)$ *trafia* jeżynę $\mathcal{B}$, jeśli dla każdego $B \in \mathcal{B}$ zachodzi $X \cap B \neq \emptyset$. *Rząd* jeżyny $\mathcal{B}$ to wielkość najmniejszego zbioru trafiającego $\mathcal{B}$. *Liczba jeżynowa* grafu G oznaczana $\mathrm{bn}(G)$ to największy rząd jeżyny w G.

Twierdzenie (o dualności szerokości drzewiastej. Seymour, Thomas, 1993)**.**
Dla każdego $k \geqslant 1$, dla każdego G zachodzi

$$\mathrm{tw}(G) \geqslant k \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } G \text{ ma jeżynę rzędu większego niż } k.$$

Równoważnie $\mathrm{tw}(G) = \mathrm{bn}(G) - 1$.

Zadanie 1. Wskazać jeżynę rzędu $n+1$ w kracie $\boxplus_n$. Tym samym wykazać, że

$$\mathrm{tw}(\boxplus_n) \geqslant n.$$

Zadanie 2. Dla ustalonego grafu G oraz liczby całkowitej $k \geqslant 2$, dwaj gracze – *Policjant* i *Złodziej* grają w następującą grę:

* Policjant rozpoczyna stawiając k policjantów w helikopterach na wierzchołkach grafu G, a więc wybiera k-elementowy multizbiór $X_1 \subseteq V(G)$. Później Złodziej, znając położenie helikopterów, wybiera wierzchołek v_1, w którym zacznie się jego ucieczka przed policją. Jeśli $v_1 \in X_1$ to Złodziej natychmiast przegrywa. Ogólnie rzecz biorąc, Złodziej porusza się wzdłuż krawędzi grafu i jest nieskończenie szybki, natomiast policjanci poruszają się gdzie chcą (stąd helikoptery) ale są nieskończenie głupi. Gra odbywa się w warunkach pełnej informacji. Obaj gracze znają graf G oraz znają położenie swoich pionków.
* W rundzie i ($i \geqslant 1$) Policjant wybiera jeden z helikopterów, powiedzmy stojący w wierzchołku x_i i wskazuje wierzchołek x'_i na którym helikopter ma wylądować. (Decyzja ta jest funkcją położenia helikopterów, czyli multizbioru X_i, oraz położenia Złodzieja, czyli wierzchołka v_i.) Wskazany helikopter unosi się w powietrzu (a więc co najwyżej $k-1$ wierzchołków jest wtedy zajętych przez Policjanta), a docelowy wierzchołek jest ogłoszony wszem i wobec, a więc także Złodziejowi (sic!). Złodziej poznając cel lotu helikoptera może opuścić swój wierzchołek i przemieszczać się wzdłuż krawędzi grafu. Przemieszczając się może przejść dowolnie wieloma krawędziami. Jeśli jednak Złodziej sam wejdzie na wierzchołek zajęty przez Policjanta, to zostaje złapany. W końcu Złodziej decyduje się kończyć swoją podróż, powiedzmy na wierzchołku v_{i+1}, a helikopter Policjanta ląduje na wierzchołku x'_i. Jeśli Złodziej tam jest, to zostaje złapany Jeśli nie, to rozpoczyna się kolejna runda. Nowe położenie helikopterów specyfikuje multizbiór $X_{i+1} = X_i - \{x_i\} \cup \{x'_i\}$.

Złodziej wygrywa, jeżeli nigdy nie zostanie złapany przez Policjanta. Niech helicopter(G) będzie najmniejszą liczbą k taką, że Policjant ma strategię wygrywającą w grze na grafie G. Wykazać, że

$$\mathrm{helicopter}(G) = \mathrm{tw}(G) + 1.$$

Jak już widzieliśmy wcześniej, lasy mają nieograniczoną szerokość ścieżkową. Okazuje się, że minory lasów są nieuniknione w grafach o dużej szerokości ścieżkowej. Konkretniej: Istnieje funkcja f taka, że dla dowolnego n oraz dowolnego lasu F na n wierzchołkach dla każdego grafu G

$$\text{jeśli} \quad \mathrm{pw}(G) \geqslant f(n) \quad \text{to} \quad F \prec G.$$

Twierdzenie to zostało opublikowane przez Robertsona i Seymoura w pracy *Graph Minors I: Excluding a forest* (1983). Funkcja f wskazana w dowodzie jest monstrualna. Później ukazały się dwie prace upraszczające dowód i poprawiające asymptotykę funkcji f. Celem Zadań 3-5 jest wykazanie, że dla dowolnego n oraz dowolnego lasu F na n wierzchołkach dla każdego grafu G

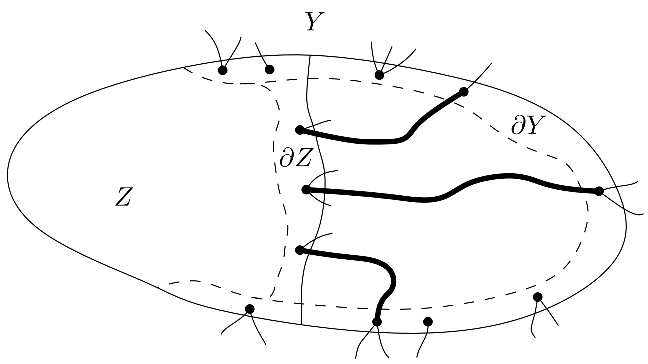
$$\text{jeśli} \quad \mathrm{pw}(G) \geqslant n-1 \quad \text{to} \quad F \prec G.$$

Niech G będzie grafem. *Brzegiem* ∂X zbioru $X \subseteq V(G)$ nazywamy zbiór tych wierzchołków z X, które są połączone krawędzią z wierzchołkiem spoza X. Dla $n \geqslant 0$, niech $\mathcal{B}_n(G)$ będzie rodziną takich podzbiorów $X \subseteq V(G)$, dla których istnieje ciąg $\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \ldots \subseteq X_s = X$ spełniający $|\partial X_i| + |X_{i+1} \smallsetminus X_i| \leqslant n$ dla $1 \leqslant i \leqslant s-1$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $V(G) \in \mathcal{B}_n(G)$, to $\mathrm{pw}(G) < n$.

Niech $A, B \subseteq V(G)$. Ścieżka $P = x_0 \ldots x_k$ jest A-B *ścieżką* jeśli $V(P) \cap A = \{x_0\}$ oraz $V(P) \cap B = \{x_k\}$.

Zadanie 4. Niech $Y \in \mathcal{B}_n(G)$ oraz $Z \subseteq Y$. Wykazać, że jeśli istnieją takie rozłączne Z-∂Y ścieżki $(P_z)_{z \in \partial Z}$, że $z \in P_z$ dla wszystkich $z \in \partial Z$, to $Z \in \mathcal{B}_n(G)$. Patrz rysunek.



Niech T będzie drzewem o $n+1$ wierzchołkach. Oznaczmy wierzchołki drzewa $V(T) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}\}$ w taki sposób, że v_{i+1} ma dokładnie jednego sąsiada w zbiorze $\{v_1, \ldots, v_i\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Oznaczmy przez T^i poddrzewo T składające się z wierzchołków $\{v_1, \ldots, v_i\}$.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $\mathrm{pw}(G) \geqslant n$, to dla każdego $i \in \{1, \ldots, n\}$ istnieje taki zbiór $X^i \in \mathcal{B}_n(G)$, że

(i) $|\partial X^i| = i$,
(ii) dla każdego $Y \in \mathcal{B}_n(G)$, jeśli $X \subsetneq Y$, to $|\partial Y| > i$ oraz
(iii) istnieje taki model T^i w $G[X^i]$, że każdy z i wierzchołków w zbiorze ∂X^i należy w modelu do podgrafu odpowiadającego innemu wierzchołkowi drzewa T^i.

Uwaga: Na potrzeby zadania o zatorach rozważamy separacje w których niektóre krawędzie mogą być po obu stronach! *Separacją* grafu G nazywamy taką parę (A, B) podgrafów grafu G, że $A \cup B = G$. Liczbę $|V(A) \cap V(B)|$ nazywamy *rzędem* separacji (A, B).

Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. *Zatorem* rzędu k w grafie G nazywamy taką rodzinę $\mathcal{S}$ separacji rzędu mniejszego niż k, że

(i) jeśli (A, B) jest separacją rzędu mniejszego niż k, to $(A, B) \in \mathcal{S}$ lub $(B, A) \in \mathcal{S}$;
(ii) jeśli $(A_1, B_1), (A_2, B_2) \in \mathcal{S}$, to $A_1 \cup A_2 \neq G$.
(iii) jeśli $(A, B) \in \mathcal{S}$, to $V(A) \neq V(G)$.

Zadanie 6. Wykazać, że dla każdego $n \geqslant 1$ istnieje drzewo binarne z zatorem rzędu n.

Bienstock, Robertson, Seymour i Thomas (1991) wykazali, że zator rzędu k jest certyfikatem na to, że graf ma szerokość ścieżkową $> k$.

Twierdzenie (o dualności szerokości ścieżkowej)**.** Dla każdej liczby całkowitej $k \geqslant 1$ i kadego grafu G

$$\mathrm{pw}(G) \geqslant k \quad \Leftrightarrow \quad G \text{ ma zator rzędu większego niż } k.$$

Zadanie 7. Wykazać implikację $\Leftarrow$ Twierdzenia o dualności ścieżkowej.

Zadanie 8. Wykazać, że jeżeli w grze z Zadania 2 Złodziej jest niewidzialny (to znaczy policja wybiera zbiór X_{i+1} jedynie na podstawie X_i), to Policjant ma strategię wygrywającą dla k helikopterów wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{pw}(G) \leqslant k - 1$.