Strukturalna Teoria Grafów

Piotr Micek i Michał Seweryn

Zestaw 6
Semestr letni 2017/2018
Kraków, 5 kwietnia 2018

Splątania

Niech G będzie grafem, a $A, B \subseteq G$ będą podgrafami G. Para (A, B) jest *separacją* G jeśli $A \cup B = G$ oraz $E(A) \cap E(B) = \emptyset$. *Rząd* separacji (A, B) równy jest $|V(A) \cap V(B)|$. *k-separacja* G to separacja G o rzędzie mniejszy równym k.

Rodzina $(k-1)$-separacji $\mathcal{T}$ jest *splątaniem rzędu k* w grafie G jeśli

(T1) $(A, B) \in \mathcal{T}$ lub $(B, A) \in \mathcal{T}$ dla każdej $(k-1)$-separacji (A, B) grafu G;

(T2) jeśli $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}$, to $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$;

(T3) $V(A) \neq V(G)$ dla każdej $(A, B) \in \mathcal{T}$.

Niech $\mathrm{tn}(G)$ będzie największym rzędem splątania w G.

Zadanie 1 (submodularność rzędu separacji)**.**
Jeśli (A_1, B_1) i (A_2, B_2) są separacjami w grafie G, to również $(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)$ oraz $(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$ są separacjami. Co więcej,

$$\mathrm{ord}(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2) + \mathrm{ord}(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2) \leqslant \mathrm{ord}(A_1, B_1) + \mathrm{ord}(A_2, B_2).$$

Zadanie 2. Niech $H \simeq \boxplus_k$. Rozważyć rodzinę $\mathcal{T}$ takich $(k-1)$-separacji (A, B) grafu H, że B zawiera wiersz kraty H. Wykazać, że $\mathcal{T}$ jest splątaniem rzędu k w H.

Niech G będzie grafem takim, żę $H \prec G$. Zaproponować analogiczne splątanie G rzędu k *indukowane* przez kratę H.

Zadanie 3. Niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem rzędu k grafu G. Wykazać, że

(1) jeśli (A, B) jest separacją w G taką, że $|V(A)| < k$, to $(A, B) \in \mathcal{T}$;
(2) jeśli $(A, B) \in \mathcal{T}$, a (A', B') jest $(k-1)$-separacją taką, że $B \subseteq B'$, to $(A', B') \in \mathcal{T}$;
(3) jeśli $(A, B), (A', B') \in \mathcal{T}$ oraz $\mathrm{ord}(A \cup A', B \cap B') < k$, to $(A \cup A', B \cap B') \in \mathcal{T}$.

Dwa podzbiory wierzchołków $A, B \subseteq V(G)$ *dotykają się*, jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ lub istnieje A-B krawędź. Rodzinę spójnych podzbiorów $V(G)$ takich, że każde dwa się dotykają, nazywamy *jeżyną* w G. Zbiór $X \subseteq V(G)$ *trafia* jeżynę $\mathcal{B}$, jeśli dla każdego $B \in \mathcal{B}$ zachodzi $X \cap B \neq \emptyset$. *Rząd* jeżyny $\mathcal{B}$ to wielkość najmniejszego zbioru trafiającego $\mathcal{B}$. *Liczba jeżynowa* grafu G oznaczana $\mathrm{bn}(G)$ to największy rząd jeżyny w G.

Trzy podzbiory wierzchołków $A, B, C \subseteq V(G)$ *dotykają się*, jeśli $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ lub istnieje krawędź w G taka, że każdy ze zbiorów zawiera choć jeden koniec krawędzi. Rodzinę spójnych podzbiorów $V(G)$ takich, że każde trzy się dotykają, nazywamy *maliną* w G. Zauważ, że każda malina w G jest jeżyną w G. *Rząd* maliny to jej rząd jako jeżyny.

Zadanie 4. Wykazać, że dla każdego grafu G

$$\operatorname{tn}(G) \text{ równe jest największemu rzędowi maliny w } G.$$

Zadanie 5. Wykazać, że dla każdego grafu G

$$\operatorname{tn}(G) \leqslant \operatorname{bn}(G) \leqslant 2\operatorname{tn}(G).$$

Niech G będzie grafem i $X \subseteq V(G)$. Zbiór X jest *wysoce spójny* w G (ang. *highly connected*) jeśli dla dowolnych $Y, Z \subseteq X$ istnieją rozłączne wierzchołkowo Y-Z ścieżki w G bez wierzchołków wewnętrznych w X. Niech $\operatorname{hc}(G)$ będzie maksymalnym rozmiarem zbioru wysoce spójnego w G.

Niech $k \geqslant 1$ i $X \subseteq V(G)$ jest *k-zwarty* jeśli dla każdego $Y \subseteq V(G)$ takiego, że $|Y| < k$ istnieje komponent $G - Y$ zawierający wiecej niż połowę elementów X. Niech $\operatorname{link}(G)$ będzie największym k dla którego istnieje zbiór k-zwarty w G.

Zadanie 6. Wykazać, że dla każdego grafu G

$$\operatorname{link}(G) \leqslant \operatorname{bn}(G) \leqslant 2\operatorname{link}(G).$$

Zadanie 7. Wykazać, że dla każdego grafu G

$$\operatorname{bn}(G) \leqslant \operatorname{hc}(G) \leqslant 3\operatorname{link}(G) \leqslant 3\operatorname{bn}(G).$$