Splątania i matroidy

Uwaga: Zadania 2, 3, 6, 7 z zestawu szóstego są wciąż aktualne.

Niech G będzie grafem, a $\mathcal{T}$ jego ustalonym splątaniem rzędu k. Wówczas dla dowolnego zbioru wierzchołków $X \subseteq V(G)$ definiujemy wartość $\kappa(X)$ jako minimalny rząd separacji $(A, B) \in \mathcal{T}$ takiej, że $X \subseteq V(A)$, lub jako k jeżeli nie istnieje taka separacja. Tak zdefiniowana funkcja spełnia aksjomaty *funkcji rangi* matroidu, to znaczy

* $\kappa(\emptyset) = 0$,
* $\kappa(X) \leqslant \kappa(X \cup \{x\}) \leqslant \kappa(X) + 1$ dla dowolnych $X \subseteq V(G)$, $x \in V(G)$,
* $\kappa(X \cap Y) + \kappa(X \cup Y) \leqslant \kappa(X) + \kappa(Y)$ dla dowolnych $X, Y \subseteq V(G)$.

Mówimy, że zbiór $X \subseteq V(G)$ jest *niezależny*, jeżeli $\kappa(X) = |X|$.

Zadanie 1. Wykazać, że zbiory niezależne spełniają następujące warunki:

* $\emptyset$ jest niezależny,
* podzbiory zbiorów niezależnych są niezależne,
* dla dowolnych zbiorów niezależnych $X, Y \subseteq V(G)$, jeśli $|X| < |Y|$, to istnieje $y \in Y - X$ taki, że $X \cup \{y\}$ jest niezależny.

Zbiór $X \subseteq V(G)$ jest *domknięty*, jeżeli dla dowolnego $x \in V(G) - X$ zachodzi $\kappa(X \cup \{x\}) > \kappa(X)$.

Zadanie 2. Wykazać, że dla każdego zbioru $X \subseteq V(G)$ istnieje dokładnie jeden zbiór domknięty Y taki, że $X \subseteq Y \subseteq V(G)$ oraz $\kappa(Y) = \kappa(X)$.

Taki zbiór Y nazywamy *domknięciem* zbioru X.

Na wykładzie widzieliśmy, że jeśli graf G ma splątanie rzędu większego niż $2k^2$, to $2 \times k \prec G$. Wykorzystamy tę obserwację w dowodzie następującego twierdzenia.

Twierdzenie (Erdős-Pósa)**.** Istnieje funkcja f taka, że dla dowolnego grafu G i dla dowolnego $k \geqslant 1$

(i) G ma k rozłącznych cykli lub
(ii) istnieje zbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leqslant f(k)$ oraz $G - X$ jest lasem.

Niech $f(1) = 0$ oraz $f(k) = 24k^2 + 2f(k-1)$ dla $k \geqslant 2$. Załóżmy, że twierdzenie nie zachodzi dla pewnego k i weźmy najmniejsze takie k. Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich takich $(8k^2)$-separacji (A, B) grafu G, że $A - V(B)$ jest lasem.

Zadanie 3. Wykazać, że $\mathcal{T}$ jest splątaniem rzędu $8k^2 + 1$. A zatem G zawiera minor kraty $2 \times (2k)$. Co prowadzi do sprzeczności. Jakiej? To zakończy dowód Twierdzenia Erdősa-Pósy.

Ostatnie zadanie w tym zestawie wykorzystamy jako obserwację w trakcie dowodu Twierdzenia o kracie.

Ciąg $(H_1, \ldots, H_t)$ podgrafów grafu G jest *k-dysekcją* grafu G, jeżeli dla każdego $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ para $(H_1 \cup \ldots \cup H_i, H_{i+1} \cup \ldots \cup H_t)$ jest k-separacją G.

Oznaczmy przez $\kappa_G(X, Y)$ maksymalną liczbę rozłącznych X-Y ścieżek w grafie G.

Zadanie 4. Niech $P_1, \ldots, P_k$ będą rozłącznymi X-Y ścieżkami w grafie G i niech $P_1 = (v_0, \ldots, v_t)$. Wykazać, że jeżeli dla każdego $i \in \{1, \ldots, t-1\}$ zachodzi $\kappa_{G-\{v_i\}}(X, Y) < k$, to istnieje k-dysekcja $(H_1, \ldots, H_t)$ taka, że

(i) $X \subseteq V(H_1)$, $Y \subseteq V(H_t)$ oraz
(ii) $v_i \in V(H_i) \cap V(H_{i+1})$ dla $i \in \{1, \ldots, t-1\}$.