

Separacje krawędziowe a dekompozycja drzewiasta

Separacją krawędziową grafu G nazywamy podział zbioru krawędzi $E(G)$ na parę rozłącznych zbiorów $\{E_1, E_2\}$. Dwie nieorientowane separacje $\{E_1, E_2\}$ i $\{F_1, F_2\}$ tego samego grafu są *zagnieżdżone*, jeżeli $E_i \subseteq F_j$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ (i wtedy $F_{3-j} \subseteq E_{3-i}$, więc relacja bycia zagnieżdżonym jest symetryczna). Zbiór separacji pewnego grafu jest *zagnieżdżony*, jeżeli każda para separacji w tym zbiorze jest zagnieżdżona.

Niech G będzie grafem, a $(T, \mathcal{V})$ jego dekompozycją drzewiastą. Załóżmy ponadto, że dla każdej krawędzi $e \in E(G)$ jest wyróżniony pewien *wierzchołek świadczący* $t(e) \in V(T)$, którego worek $V_{t(e)} \in \mathcal{V}$ zawiera oba końce krawędzi e . Niech $t't'' \in E(T)$. Wtedy definiujemy $E_{t't''}$ jako zbiór krawędzi $e \in E(G)$ takich, że t' leży na ścieżce z $t(e)$ do t'' w T . Wtedy każda krawędź $t't'' \in E(T)$ indukuje separację krawędziową $\{E_{t't''}, E_{t''t'}\}$ grafu G .

Zadanie 1. Wykazać, że jeżeli $\mathcal{S}$ jest zagnieżdżonym zbiorem separacji grafu G , to istnieje dekompozycja drzewiasta oraz wybór wierzchołków świadczących, że $\mathcal{S}$ jest zbiorem separacji indukowanych przez krawędzie tej dekompozycji.

Zadanie 2. Rozwiązać jedno z zadań, których się nie rozwiązało na kolokwium, inne niż zadanie o kracie kontrolowanej przez splątanie (patrz Zadanie 3).

Niech G będzie grafem, a $\mathcal{T}$ splątaniem w G . Model $(V_h)_{h \in V(H)}$ grafu H w G jest *kontrolowany* przez $\mathcal{T}$, jeśli każdemu wierzchołkowi $h \in V(H)$ możemy przypisać reprezentanta $v_h \in V_h$ tak aby zbiór $\{v_h \mid h \in V(H)\}$ był $\mathcal{T}$ -niezależny.

Zadanie 3. Wykaż, że istnieje funkcja f taka, że dla dowolnego grafu G i splątania $\mathcal{T}$ rzędu $f(n)$ w G , istnieje model $\boxplus_n$ kontrolowany przez $\mathcal{T}$ w G .

Uwaga: Jest to zadanie bonusowe i szczególnie zachęcamy do pracy w grupach przy jego rozwiązywaniu. Aby otrzymać punkty bonusowe należy spisać i dostarczyć rozwiązanie zadania przed zajęciami. Jeżeli (poprawne) rozwiązanie będzie miało k autorów, to każdy z nich otrzyma $3/\sqrt{k}$ punktów bonusowych.