Drzewo splątań

Ustalmy graf G. Zbiór wszystkich splątań w G jest (częściowo) uporządkowany inkluzją. Splątania $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ są *rozróżnialne*, jeżeli są nieporównywalne w posecie splątań lub równoważnie jeżeli istnieje separacja $\{A, B\}$ grafu G taka, że $(A, B) \in \mathcal{T}$ i $(B, A) \in \mathcal{T}'$. Każda taka (niezorientowana) separacja $\{A, B\}$ *rozróżnia* splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$. Jeżeli separacja $\{A, B\}$ jest separacją rozróżniającą $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ o najmniejszym możliwym rzędzie, to mówimy, że $\{A, B\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ *efektywnie*. *Splątaniem maksymalnym* w G nazywamy każdy maksymalny element posetu wszystkich splątań. Skoro elementy maksymalne posetu tworzą antyłańcuch, to każde dwa różne splątania maksymalne są rozróżnialne.

Dwie jeżyny $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ grafu G są *rozróżnialne*, jeżeli istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| < \min\{\mathrm{ord}(\mathcal{B}_1), \mathrm{ord}(\mathcal{B}_2)\}$ oraz istnieją elementy $B_1 \in \mathcal{B}_1$ oraz $B_2 \in \mathcal{B}_2$ leżące w różnych składowych grafu $G - X$.

Będziemy potrzebować naturalnego przejścia z separacji krawędziowej do zwykłej separacji. Aby to przejście działało, będziemy przyjmować niewinne założenie o grafie G, na którym pracujemy, że nie ma wierzchołków izolowanych. Każda separacja krawędziowa $\{E_1, E_2\}$ grafu G indukuje zwykłą separację $\{G[E_1], G[E_2]\}$. Dzieki temu, że G nie ma wierzchołków izolowanych, każdy wierzchołek G znajduje się po co najmniej jednej stronie. Dodatkowo łatwo widać, że $\mathrm{ord}(E_1, E_2) = \mathrm{ord}(G[E_1], G[E_2])$. Od tej chwili będziemy operować skrótem myślowym i kiedykolwiek będziemy mieli separację krawędziową $\{E_1, E_2\}$ i splątanie $\mathcal{T}$, będziemy pisać $(E_1, E_2) \in \mathcal{T}$, jeśli $(G[E_1], G[E_2]) \in \mathcal{T}$. Podobnie $\{E_1, E_2\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, jeśli $\{G[E_1], G[E_2]\}$ rozróżnia $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$.

Twierdzenie (o drzewie splątań). Niech G będzie grafem bez wierzchołków izolowanych, a $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_n$ będą splątaniami maksymalnymi w G. Wówczas istnieje dekompozycja drzewiasta $(T, \mathcal{V})$ razem z wyróżnionymi węzłami świadczącymi oraz bijekcja $\tau : V(T) \to \{\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n\}$, taka że:

(i) dla każdego splątania $\mathcal{T}_i = \tau(t_i)$ i dla każdej krawędzi $s's''$ w T, jeśli $\mathrm{ord}(E_{s's''}, E_{s''s'}) < \mathrm{ord}(\mathcal{T}_i)$ i s' leży na ścieżce z t_i do s'' w T, to $(E_{s''s'}, E_{s's''}) \in \mathcal{T}_i$, oraz

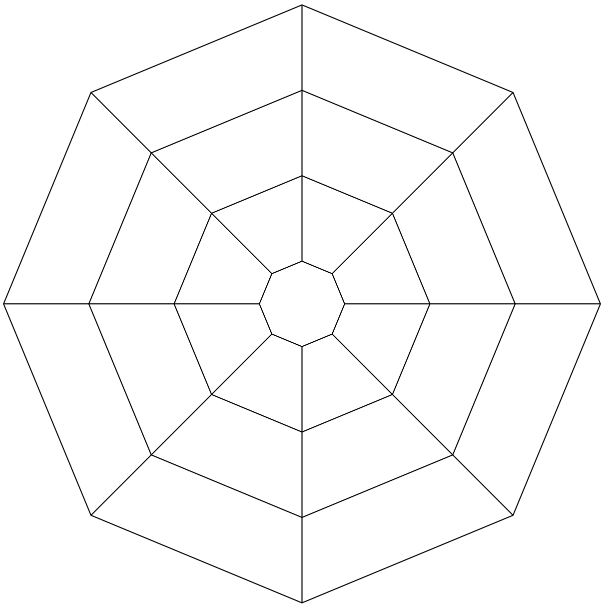
(ii) dla każdych dwu różnych splątań $\mathcal{T}_i = \tau(t_i)$, $\mathcal{T}_j = \tau(t_j)$ istnieje krawędź $s's''$ na ścieżce z t_i do t_j w T taka, że separacja $\{E_{s's''}, E_{s''s'}\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}_i$ i $\mathcal{T}_j$ efektywnie.

Zadanie 1. Korzystając z poznanego na wykładzie Twierdzenia o zagnieżdżonym zbiorze separacji rozróżniających splątania udowodnić Twierdzenie o drzewie splątań.

Zadanie 2. Wykazać, że każdy n wierzchołkowy graf ma co najwyżej n maksymalnych splątań.

Zadanie 3. Niech C będzie cyklem na n wierzchołkach, a P_1, P_2, P_3 takimi wierzchołkowo rozłącznymi ścieżkami w C, że $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) = V(C)$. Wówczas $\{V(P_1), V(P_2), V(P_3)\}$ jest jeżyną w C. Wykazać, że wszystkie jeżyny tej postaci są parami rozróżnialne, a więc C ma co najmniej $\binom{n}{3}$ parami rozróżnialnych jeżyn.

Cylindrem $m \times n$ nazywamy graf o mn wierzchołkach postaci $C_1 \cup \ldots \cup C_n \cup P_1 \cup \ldots \cup P_m$, gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$, są wierzchołkowo rozłącznymi cyklami długości m każdy, a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ są rozłącznymi wierzchołkowo ścieżkami, każda o n wierzchołkach i każda przecinająca cykle $C_1, C_2, \ldots, C_n$ w tej kolejności (patrz Rysunek 1).



Rysunek 1: Cylinder 8×4.

Zadanie 4. Niech G będzie cylindrem $(10n+2) \times n$. Dla każdego $Y \subseteq V(G)$ takiego, że $|Y| \leqslant 2n$ niech $f(Y)$ będzie składową grafu $G - Y$ taką, że

* Jeśli $G - Y$ ma dokładnie jedną składową zawierającą jedną ze ścieżek P_i, to $f(Y)$ jest tą składową;
* W przeciwnym wypadku łatwo widać, że $|Y| = 2n$ i Y przecina każdy cykl cylindra G w dokładnie dwu wierzchołkach. Jeśli istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że któryś z komponentów $G - Y$ zawiera co najmniej $5n+1$ wierzchołków cyklu C_i, to niech i będzie najmniejsze możliwe i wtedy $f(Y)$ jest komponentem $G - Y$ zawierającym co najmniej $5n+1$ wierzchołków C_i.
* W przeciwnym wypadku, niech $f(Y)$ będzie dowolnie wybranym komponentem $G - Y$.

Niech $\mathcal{B} = \{f(Y) \mid Y \subseteq V(G)$, gdzie $|Y| \leqslant 2n\}$. Wykaż, że $\mathcal{B}$ jest jeżyną w G rzędu co najmniej $2n+1$. Rozważając opisaną konstrukcję, wywnioskuj, że G ma 2^{3^n} parami rozróżnialnych jeżyn.