A-ścieżki i transwersalne ścieżki

Dla dowolnego grafu G oraz zbioru $A \subseteq V(G)$, *A-ścieżką* nazywamy ścieżkę o długości (mierzonej liczbą krawędzi) co najmniej 1, której jedynymi wierzchołkami w A są jej końce. Dla dowolnego grafu G oraz zbioru $A \subseteq V(G)$ przez $\nu(G, A)$ oznaczamy maksymalną liczbę parami rozłącznych A-ścieżek w G. W szczególności $\nu(G) = \nu(G, V(G))$ jest rozmiarem największego skojarzenia w G.

Zadanie 1. Niech k i ℓ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że dla dowolnego grafu G oraz zbioru $A \subseteq V(G)$ zachodzi

(i) G zawiera k parami rozłącznych A-ścieżek o długości co najmniej ℓ lub
(ii) istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| = O(k\ell)$ oraz graf $G - X$ nie ma A-ścieżki o długości co najmniej ℓ.

Wykazać, że dla dowolnych k oraz ℓ istnieje graf, dla którego $\nu(G, A) = k$ oraz najmniejszy zbiór X przecinający wszystkie A-ścieżki o długości co najmniej ℓ ma moc $\Theta(k\ell)$.

Zadanie 2. Niech k będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że dla dowolnego grafu G oraz każdego zbioru $A \subseteq V(G)$ zachodzi

(i) G zawiera k parami rozłącznych A-ścieżek o parzystej długości lub
(ii) istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| = O(k)$ oraz graf $G - X$ nie ma A-ścieżki o parzystej długości.

Zadanie 3. Udowodnić formułę Tutte'a-Berge'a: Dla dowolnego grafu G zachodzi

$$\begin{aligned}\nu(G) &= \min_{U \subseteq V(G)} \left(|U| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K)| \right\rfloor \right) \\ &= \frac{1}{2} \min_{U \subseteq V(G)} \left(|U| + |V(G)| - \operatorname{odd}(G - U) \right),\end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{K}(H)$ oznacza zbiór spójnych składowych grafu H, a $\operatorname{odd}(H)$ oznacza liczbę spójnych składowych grafu H mających nieparzystą moc.

Wskazówka: W dowodzie nierówności $\geqslant$ sprowadzić do sytuacji, gdy G jest spójny. Przeprowadzić indukcję względem $|V(G)|$. Rozważyć osobno przypadki, gdy istnieje wierzchołek zawarty we wszystkich największych skojarzeniach oraz gdy taki wierzchołek nie istnieje.

Zadanie 4. Udowodnić Twierdzenie Gallai: Dla dowolnego grafu G oraz dowolnego zbioru $A \subseteq V(G)$ zachodzi

$$\nu(G, A) = \min_{U \subseteq V(G)} \left(|U| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K) \cap A| \right\rfloor \right).$$

Wskazówka: Zastosować formułę Tutte'a-Berge'a do takiego grafu G', że $V(G') = V(G) \cup \{v' \mid v \in V(G) - A\}$ oraz $E(G') = E(G) \cup \{vv' \mid v \in V(G) - A\} \cup \{uv' \mid uv \in E(G), v \in V(G) - A\}$.

Niech G będzie grafem, a S i T dwoma rozłącznymi zbiorami jego wierzchołków. Niech ponadto $\mathcal{S}$ będzie podziałem zbioru S na rozłączne (niekoniecznie spójne) bloki.

Zadanie 5. Dla dowolnego zbioru $S' \subseteq S$ definiujemy

$$r_1(S') = \kappa_G(S', T) \qquad \text{oraz} \qquad r_2(S') = |\{A \in \mathcal{S} \mid S' \cap A \neq \emptyset\}|$$

Wykazać, że r_1 i r_2 są funkcjami rang pewnych matroidów.

Zadanie 6. Załóżmy, że każdy blok w $\mathcal{S}$ jest spójny. Niech k oznacza maksymalną liczbę parami rozłącznych S-T-ścieżek o tej własności, że każdy blok w $\mathcal{S}$ zawiera koniec co najwyżej jednej ścieżki. Niech $B \subseteq V(G)$ będzie zbiorem przecinającym wszystkie bloki z $\mathcal{S}$. Wykazać, że $\kappa_G(B, T) \geqslant \frac{k}{2}$.