Zadania różne

Stowarzyszeniem w grafie G nazywamy cykliczną permutację pewnego zbioru wierzchołków grafu G. Zbiór wierzchołków w stowarzyszeniu oznaczamy przez $V(\Omega)$. Dla $x, y \in V(\Omega)$ przez $\Omega[x,y]$ i $\Omega[y,x]$ oznaczamy dwa przedziały w Ω o końcach w x i y.

Niech G będzie grafem, a Ω stowarzyszeniem w tym grafie. Ω-*dekompozycją wirową* grafu G nazywamy rodzinę zbiorów $\mathcal{V} = \{V_x\}_{x \in V(\Omega)}$, która spełnia następujące warunki:

1. $\bigcup_{x \in V(\Omega)} V_x = V(G)$,
2. $x \in V_x$ dla każdego $x \in V(\Omega)$,
3. każda krawędź grafu G ma oba końce w pewnym V_x,
4. Dla dowolnych $x, y \in V(G)$ zachodzi $V_x \cap V_y \subseteq \bigcap_{z \in \Omega[x,y]} V_z$ lub $V_x \cap V_y \subseteq \bigcap_{z \in \Omega[y,x]} V_z$.

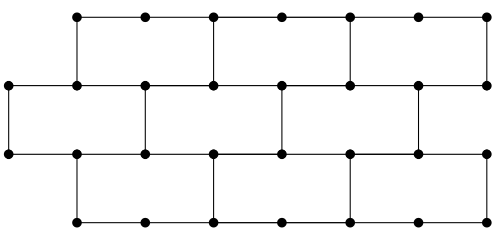
Przyczepnością dekompozycji $\mathcal{V}$ nazywamy liczbę $\max_{x \neq y} |V_x \cap V_y|$.

Jeżeli $x, y \in V(\Omega)$, a $\mathcal{P}$ jest rodziną parami rozłącznych (A, B)-ścieżek, gdzie A i B są dwoma rozłącznymi przedziałami w Ω, to mówimy że $\mathcal{P}$ jest *transakcją dla stowarzyszenia* Ω.

Zadanie 1. Niech G będzie grafem, a Ω stowarzyszeniem w grafie G. Wykazać, że jeżeli każda transakcja $\mathcal{P}$ dla stowarzyszenia Ω spełnia $|\mathcal{P}| \leqslant k$, to istnieje Ω-dekompozycja wirowa grafu G o przyczepności co najwyżej k.

Zadanie 2. Niech G będzie grafem 3-spójnym, a x oraz y dwoma jego wierzchołkami. Wykazać, że w grafie G istnieje taka indukowana (x, y)-ścieżka P, że graf $G - P$ jest spójny.

Elementarnym r-murem nazywamy graf W otrzymany z kraty $r \times (2r)$ przez usunięcie krawędzi o końcach w (i, j) i $(i + 1, j)$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, r - 1\}$ oraz $j \in \{1, 2, \ldots, 2r\}$ spełniających $i \equiv j \pmod 2$, a następnie usunięciu wierzchołków o stopniu 1. *r-murem* nazywamy każdą subdywizję elementarnego r-muru.



Rysunek 1: Elementarny 4-mur.

Zadanie 3. Wykazać, że parzyste cykle mają własność Erdősa-Pósy, to znaczy dla każdej liczby całkowitej k istnieje taka liczba $m = m(k)$, że dla każdego grafu G

(i) graf G zawiera k parami rozłącznych parzystych cykli, lub
(ii) istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| \leqslant m$ oraz $G - X$ nie zawiera cykli o parzystej długości.

Wskazówka: Wykazać, że dla odpowiednio dużej wartości r każdy r-mur zawiera k parami rozłącznych parzystych cykli.

Zadanie 4. Wykazać, że dla pewnej liczby całkowitej $d \geqslant 1$, A-ścieżki o długości podzielnej przez d nie mają własności Erdősa-Pósy, to znaczy istnieje taka liczba całkowita $k \geqslant 1$, że dla każdej liczby całkowitej $m \geqslant 1$ istnieje graf G oraz zbiór $A \subseteq V(G)$ o tej własności, że G nie zawiera k rozłącznych A-ścieżek o długości podzielnej przez d oraz dla każdego zbioru $X \subseteq V(G)$ spełniającego $|X| \leqslant m$ graf $G - X$ zawiera A-ścieżkę o długości podzielnej przez d.

Wskazówka: Prowadzący przedmiot znają rozwiązanie dla $d = 6$. Udowodnienie tezy dla mniejszych wartości d może być dużym wyzwaniem lub rzeczą niemożliwą.