

STRUKTURALNA TEORIA GRAFÓW

PIOTR MICEK I MICHAŁ SEWERYN

STRESZCZENIE. Notatki do wykładów w ramach kursu Strukturalna Teoria Grafów prowadzonego w semestrze letnim 2017/2018 na Uniwersytecie Jagiellońskim.

SPIS TREŚCI

Wstęp	2
1. Minory i szerokość drzewiasta	3
2. Przykłady klas grafów zamkniętych na branie minorów	5
3. Jakościowe twierdzenia strukturalne	7
3.1. Przykłady	7
3.2. Konstrukcje	10
3.3. Strukturalne twierdzenie o grafach	11
4. Twierdzenie Menger'a	13
5. Dualność szerokości drzewiastej	14
6. Szerokość gałęziowa, zbiory wysoce spójne	17
7. Splątanie	19
7.1. Przykłady i dualność z dekompozycją gałęziową	19
7.2. Matroid ze splątania	20
8. Twierdzenie o kracie	22

(P. Micek, M. Seweryn) ZESPÓŁ KATEDR I ZAKŁADÓW INFORMATYKI ANALITYCZNEJ, WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI, UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI

E-mail address: `piotr.micek@tcs.uj.edu.pl`, `m.seweryn@student.uj.edu.pl`.

Date: 22 czerwca 2018.

9. Drzewo splątń	27
10. Kontrolowanie skoków na kracie rozpinającej	33
11. Rozłączne A -ścieżki	38
12. Rozłączne ścieżki transversalne	41
13. Kontrolowanie skoków na kratownicy	42
14. Twierdzenie o dwóch ścieżkach	47
15. Twierdzenie o płaskim murze	52
Dodatek A. Powierzchnie i zanurzenia grafów	55

WSTĘP

strona kursu: <https://piotrmicek.staff.tcs.uj.edu.pl/strukturalna/>

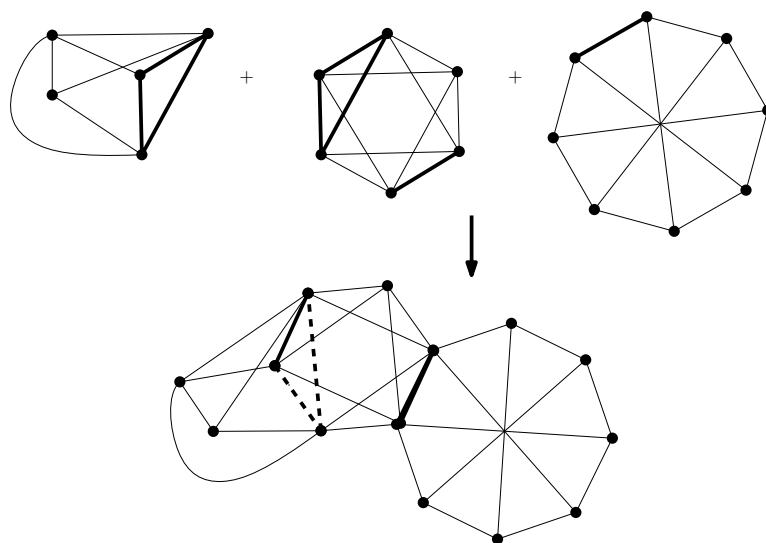
źródła, materiały:

- kurs wzorowany jest na kursie Jima Geelena *Introduction to Graph Minors* wykładanym na Uniwersytecie w Waterloo na jesieni 2016; nagrania 24 wykładów dostępne są [tutaj](#);
- rozdział *Graph Minors* w książce Reinharda Diestela *Graph Theory* jest powszechnie uważany za najlepsze wprowadzenie do Strukturalnej Teorii Grafów; książka jest dostępna w sieci.
- dodatek o powierzchniach powstał w oparciu o książkę Bojana Mohara i Carstena Thomassena *Graphs on Surfaces*.

Jak „wyglądają” grafy bez K_n -minoru¹?

Dla małych wartości n znamy dokładną charakteryzację takich grafów. Dla $n = 3$ są to lasy, dla $n = 4$ są to grafy o szerokości drzewiastej nieprzekraczającej 2. Charakteryzacja grafów bez K_5 -minoru jest opisana przez Twierdzenie Wagnera (1937): Każdy graf bez K_5 -minora można skonstruować przez sklejenia grafów wzdłuż klik wielkości co najwyżej 3, zaczynając od planarnych triangulacji i grafu Wagnera (patrz Rysunek 1). Dla $n = 6$ nie jest znana dokładna struktura grafów bez K_n -minora, są jedynie hipotezy, na przykład Hipoteza Jorgensena (1994), która mówi że każdy 6-spójny graf bez K_6 -minora jest grafem apeksowym, a więc ma wierzchołek którego usunięcie powoduje, że graf jest planarny.

¹dopełniacz od minor to minoru, a nie „minora” (<https://sjp.pwn.pl/so/minor;4465623.html>)



RYSUNEK 1. Sklejenie dwu triangulacji i grafu Wagnera.

Dla $n > 6$ prawdopodobnie nigdy nie poznamy twierdzeń charakteryzujących grafy bez K_n -minoru. Poznamy za to *Strukturalne twierdzenie o grafach*, które aproksymuje strukturę grafów bez K_n -minorów, podając dla każdego n pewien warunek opisujący strukturę grafu, który jest konieczny do tego, żeby graf nie zawierał K_n -minoru, oraz jednocześnie dla pewnego m jest warunkiem wystarczającym do tego, żeby graf nie zawierał K_m -minoru.

Twierdzenie to zostało udowodnione przez Neila Robertsona i Paula Seymoura. Jedną z konsekwencji tego wyniku jest pozytywna weryfikacja Hipotezy Wagnera, która mówi, że w dowolnym nieskończonym zbiorze grafów istnieją dwa takie, że jeden jest minorem drugiego. Dowód tego twierdzenia jest przedstawiony w serii prac zatytułowanej *Graph Minors* publikowanych w latach 1983-2011. Seria ta składa się z ponad 20 prac obejmujących łącznie prawie 750 stron.

1. MINORY I SZEROKOŚĆ DRZEWIASTA

Graf H jest *minorem* G , jeśli istnieje rodzina $(U_v)_{v \in V(H)}$ niepustych podzbiorów $V(G)$ taka, że:

- zbiory U_v są parami rozłączne;
- graf indukowany $G[U_v]$ jest spójny dla każdego $v \in V(H)$;
- jeśli $vv' \in E(H)$, to $E(U_v, U_{v'}) \neq \emptyset$.

Piszemy wtedy $H \prec G$. Rodzinę $(U_v)_{v \in V(H)}$ jak powyżej, nazywamy *modelem* H w G .

Ćwiczenie (1.2). Graf H jest minorem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy można otrzymać z G graf izomorficzny do H , wykonując ciąg operacji:

- usunięcie wierzchołka;
- usunięcie krawędzi;
- *kontrakcja* krawędzi, czyli ściągnięcie krawędzi łączącej dwa wierzchołki u i v do jednego wierzchołka, którego sąsiadami są te wierzchołki, które sąsiadują z u lub v .

H jest *topologicznym minorem* G , jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$ oraz rodzina $(P_e)_{e \in E(H)}$ ścieżek w G taka, że

- jeżeli $e \in E(H)$ ma końce w wierzchołkach u i v , to P_e jest ścieżką o końcach w $\phi(u)$ i $\phi(v)$;
- dla dowolnych dwóch krawędzi $e, e' \in E(H)$ ścieżki P_e i $P_{e'}$ są rozłączne poza końcami.

Piszemy wtedy $H \prec_{\text{top}} G$. Wierzchołki $\phi(u)$ nazywamy *rozgałęzieniami*, a pozostałe wierzchołki na ścieżkach P_e nazywamy *wierzchołkami dodatkowymi*.

Podpodziałem (ang. *subdivision*) grafu nazywamy każdy graf, który można otrzymać zastępując niektóre krawędzie wyjściowego grafu nowymi ścieżkami łączącymi końce tych krawędzi w taki sposób, że każde dwie z tych ścieżek są rozłączne wierzchołkowo poza końcami. Stąd graf H jest minorem topologicznym grafu G , jeśli zawiera podgraf izomorficzny do podpodziału H .

Ćwiczenie (1.1).

- Wykazać, że jeśli $H \prec_{\text{top}} G$, to $H \prec G$.
- Wykazać, że implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa.
- Wykazać, że jeżeli każdy wierzchołek grafu H ma stopień co najwyżej 3 oraz $H \prec G$, to $H \prec_{\text{top}} G$.

Klasa grafów $\mathcal{G}$ jest *zamknięta na branie minorów*, jeżeli dla każdego $G \in \mathcal{G}$ wszystkie minory grafu G należą do $\mathcal{G}$.

Jednym z najważniejszych wniosków ze Strukturalnego twierdzenia o grafach jest:

Twierdzenie 1.1 (twierdzenie Robertsona-Seymoura). *Dla każdej klasy $\mathcal{G}$ zamkniętej na branie minorów istnieje skończony zbiór grafów $\{H_1, \dots, H_k\}$ o tej własności, że $\mathcal{G}$ składa się dokładnie z tych grafów, dla których żaden z $H_1, \dots, H_k$ nie jest minorem.*

Ćwiczenie (1.9). Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- Każda zamknięta na branie minorów klasa grafów $\mathcal{G}$ jest określona przez pewien skończony zbiór $\{H_1, \dots, H_k\}$ zabronionych minorów, to znaczy taki zbiór, że $\mathcal{G}$ składa się dokładnie z takich grafów G , że żaden graf H_i nie jest minorem G .
- Z każdego nieskończonego zbioru grafów da się wybrać dwa takie, że jeden jest minorem drugiego.
- Istnieje przeliczalnie wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów.

- (iv) Dla każdej zamkniętej na branie minorów klasy grafów problem przynależności do klasy jest rozstrzygalny.

Tak naprawdę, z prac Robertsona-Seymoura wynika więcej. Dla dowolnej klasy $\mathcal{G}$ zamkniętej na branie minorów istnieje algorytm rozwiązujący problem przynależności do $\mathcal{G}$ w czasie $O(n^3)$. Bruce Reed i Ken-ichi Kawarabayashi zredukowali czas działania do $O(n \log n)$, a pod koniec 2016 roku Bruce Reed ogłosił istnienie algorytmu działającego w czasie $O(n)$. Z powyższych równoważności problem ten redukuje się do:

Problem H -MINOR-TESTING.

Wejście: graf G

Wyjście: TAK, jeśli H jest minorem G , NIE w przeciwnym przypadku.

Dla każdego grafu H istnieje algorytm rozwiązujący H -MINOR-TESTING w czasie $O(n^3)$ (a być może nawet liniowym).

Dekompozycję drzewiastą grafu G nazywamy parę $(T, \mathcal{B})$, gdzie T jest drzewem, a $\mathcal{B} = (B_t)_{t \in V(T)}$ jest taką rodziną niepustych podzbiorów $V(G)$ zwanych *workami*, że:

- (T1) $\bigcup_{t \in V(T)} B_t = V(G)$,
- (T2) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $t \in V(T)$ o tej własności, że $u, v \in B_t$,
- (T3) dla dowolnych węzłów $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$, jeżeli t_2 leży na ścieżce między węzłami t_1 i t_3 w T , to $B_{t_1} \cap B_{t_3} \subseteq B_{t_2}$.

Szerokością dekompozycji $(T, \mathcal{B})$ nazywamy wartość $\max_{t \in V(T)} |B_t| - 1$. *Szerokość drzewiasta* (ang. *treewidth*) grafu G to najmniejsza szerokość dekompozycji. Zbiory B_t nazywamy *workami* dekompozycji.

Ćwiczenie (2.5). Jeśli $H \prec G$, to $\text{tw}(H) \leq \text{tw}(G)$.

Natychmiastową implikacją powyższego ćwiczenia, jest że klasa grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej k jest zamknięta na branie minorów dla każdej liczby k .

2. PRZYKŁADY KLAS GRAFÓW ZAMKNIĘTYCH NA BRANIE MINORÓW

Niektóre klasy grafów zdefiniowane przez swoją strukturę są zamknięte na branie minorów. Oto kilka przykładów takich klas:

Przykład 2.1 (grafy planarne). Twierdzenie Kuratowskiego (1930) mówi, że lista zabronionych minorów dla grafów planarnych składa się z dwóch grafów - grafu pełnego K_5 oraz grafu pełnego dwudzielnego $K_{3,3}$.

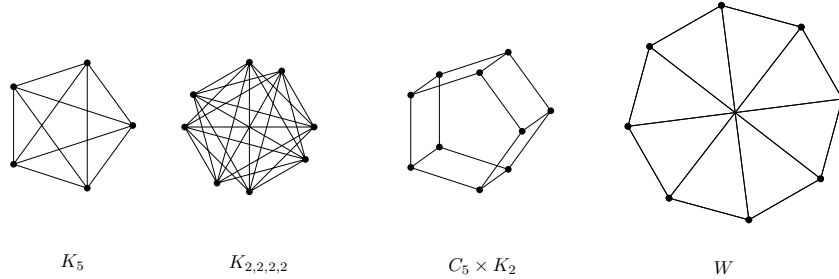
Przykład 2.2 (grafy zewnętrznie planarne). Zabronione minory dla grafów zewnętrznie planarnych to K_4 i $K_{2,3}$.

Przykład 2.3 (grafy apeksowe). Graf jest *apeksowy* (ang. *apex graph*), jeśli można usunąć jeden wierzchołek grafu w taki sposób, żeby powstały graf był planarny. Na mocy twierdzenia Robertsona i Seymoura wiemy, że istnieje skończona lista zabronionych minorów dla grafów apeksowych. Lista ta składa się z co najmniej 157 grafów i zawiera między innymi graf pełny K_6 oraz sumę rozłączną grafów K_5 i $K_{3,3}$, jednak nie wiadomo ile dokładnie jest zabronionych minorów. Mimo to znamy liniowy algorytm, który rozstrzyga czy graf jest apeksowy.

Przykład 2.1 można uogólnić na dowolną powierzchnię² Σ :

Przykład 2.4 (grafy zanurzalne w powierzchnię Σ). Dla sfery są to po prostu grafy planarne. W przypadku płaszczyzny rzutowej, lista zabronionych minorów składa się z dokładnie 103 grafów. Dla pozostałych powierzchni nie jest znana pełna lista zabronionych. Już dla stosunkowo prostej powierzchni, jaką jest torus wiadomo, że jest więcej niż 16 tysięcy zabronionych minorów.

Przykład 2.5 (grafy o ograniczonej szerokości drzewiastej). Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k klasa grafów, których szerokość drzewiasta wynosi co najwyżej k jest zamknięta na branie minorów. Dla $k = 1$ zabroniony minor to K_3 , dla $k = 2$ zabroniony minor to K_4 . Dla $k = 3$ lista zabronionych minorów liczy 4 grafy (patrz Rysunek 2).



RYSUNEK 2. Zabronione minory dla grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej 3.

Każda z powyższych klas jest zdefiniowana poprzez określenie pewnej struktury, jaką mają grafy w tych klasach. Inny sposób w jaki można określić zamkniętą na branie minorów klasę grafów jest podanie explicite listy zabronionych minorów, na przykład:

Przykład 2.6 (grafy bez ścieżki długości k). Dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej k grafy nie zawierające ścieżki długości k to dokładnie te grafy, których minorem nie jest ścieżka długości k .

Przykład 2.7 (grafy bez k rozłącznych cykli). Dla każdej liczby całkowitej dodatniej k klasa grafów nie mających k rozłącznych cykli jest określona przez jeden zabroniony minor – sumę rozłączną k 3-cykli.

Przykład 2.8 (lasy). Szczególnym przypadkiem poprzedniego przykładu dla $k = 1$ jest klasa wszystkich lasów

Jako ostatni przedstawiamy pewien zdumiewający przykład.

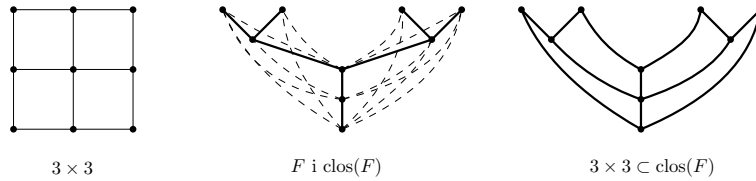
²Powierzchnie są zdefiniowane w Dodatku A

Przykład 2.9 (*knotlessly-embeddable graphs*). Rozpatrzmy klasę takich grafów, dla których istnieje takie zanurzenie w $\mathbb{R}^3$, że każdy cykl w grafie jest przekształcany w węzeł który da się w sposób ciągły rozsupłać do prostej pętelki. Nie jest znany algorytm, który rozstrzyga, czy graf należy do tej klasy. Jednak na mocy twierdzenia Robertsona Seymoura wiemy, że taki algorytm istnieje. Nie jesteśmy jednak w stanie skonstruować tego algorytmu i nawet, gdybyśmy mieli taki algorytm, to nie umielibyśmy o nim pokazać że jest prawidłowy!

3. JAKOŚCIOWE TWIERDZENIA STRUKTURALNE

3.1. Przykłady. Pierwszy przykład jakościowego twierdzenia strukturalnego opisuje strukturę grafów nie zawierających długich ścieżek. Niech $\mathcal{P}_k$ będzie klasą grafów bez ścieżki długości k (liczymy krawędzie) jako podgrafu. Oczywiście taka klasa jest zamknięta na branie minorów i jest zdefiniowana przez jeden zabroniony minor (rzeczona ścieżka). Jak te grafy wyglądają? Jaka jest ich struktura?

Ukorzonym lasem nazywamy sumę rozłącznych ukorzenionych drzew. *Wysokością* ukorzonego lasu F nazywamy maksymalną liczbę wierzchołków na ścieżce od korzenia do liścia w F . *Domknięcie* $\text{clos}(F)$ ukorzonego lasu F , to graf powstały przez dodanie w F krawędzi łączących każdy wierzchołek z wszystkimi jego przodkami. *Głębokość drzewiasta* grafu G , oznaczana $\text{td}(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje ukorzeniony las F o wysokości k taki, że $G \subseteq \text{clos}(F)$.



RYSUNEK 3. Krata $\boxplus_3$ zanurzona w domknięciu drzewa wysokości 5.

Niech $\mathcal{X}_k$ będzie klasą grafów o głębokości drzewiastej co najwyżej k .

Ćwiczenie. (3.1) Wykazać, że jeśli $H \prec G$, to $\text{td}(H) \leq \text{td}(G)$. Zatem $\mathcal{X}_k$ jest zamknięta na branie minorów.

Ćwiczenie. (3.4) Wykazać, że ścieżki mają dowolnie dużą głębokość drzewiastą.

Twierdzenie 3.1. Istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geq 1$ zachodzi

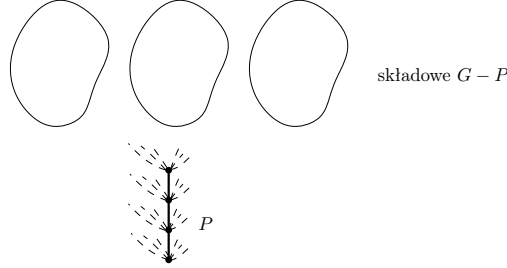
$$\mathcal{P}_k \subseteq \mathcal{X}_{k^2} \subseteq \mathcal{P}_{f(k^2)}.$$

Dowód. Pierwsze zawieranie jest konsekwencją następującej obserwacji.

Obserwacja 3.2. Niech G będzie spójnym grafem, w którym najdłuższa ścieżka ma długość k . Jeśli P_1 i P_2 są ścieżkami w G o długości k , to te ścieżki się przecinają.

Równoważnie, niech G będzie spójnym grafem o najdłuższej ścieżce długości k i P będzie ścieżką w G długości k . Wtedy $G - P$ ma ścieżki długości co najwyżej $k - 1$.

Niech $G \in \mathcal{P}_k$. Chcemy wskazać ukorzeniony las F wysokości co najwyżej k^2 taki, że $G \subseteq \text{clos}(F)$. Każdą spójną składową G będziemy zanurzać w osobnym drzewie F . Przyjmijmy, że G jest spójny i niech P będzie najdłuższą ścieżką w G . Wtedy $G - P$ ma ścieżki długości co najwyżej $k - 2$. Budujemy drzewo F rekurencyjnie jak na rysunku poniżej. Istnienie funkcji f i drugie zawieranie wynika bezpośrednio z faktu,



RYSUNEK 4. Zanurzenie G w ukorzeniony las małej wysokości.

że ścieżki mają nieograniczoną głębokość drzewiastą. Za wartość $f(k)$ wystarczy przyjąć takie n że ścieżki długości co najmniej n mają głębokość drzewiastą większą od k . $\square$

Wniosek 3.3. *Zamknięta na branie minorów klasa $\mathcal{G}$ ma ograniczoną głębokość drzewiastą wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera wszystkich ścieżek.*

Kolejny przykład dotyczy grafów, które mają ograniczoną liczbę wierzchołkowo rozłącznych cykli. Niech $\mathcal{C}_k$ będzie klasą grafów bez k rozłącznych wierzchołkowo cykli. Zatem $\mathcal{C}_1$ to klasa lasów. Zauważmy, że $\mathcal{C}_k$ jest zdefiniowana w terminach listy zabronionych minorów. Lista ta ma jeden graf: to jest k rozłącznych kopii C_3 . Jak wyglądają grafy w $\mathcal{C}_k$?

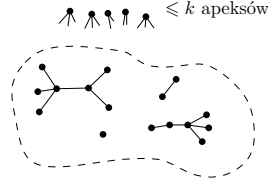
Twierdzenie 3.4 (Erdős-Pósa, 1965). *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geq 1$ i każdego grafu G zachodzi:*

- (i) G ma k rozłącznych cykli, lub
- (ii) istnieje podzbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leq f(k)$ oraz $G - X$ nie ma żadnych cykli (jest lasem).

Łatwo zauważyć, że jeśli dla grafu G istnieje taki podzbiór $X \subseteq V(G)$ o mocy co najwyżej $f(k)$, że $G - X$ jest lasem, to w G nie ma $f(k) + 1$ rozłącznych cykli, więc na twierdzenie Erdősa-Pósa możemy patrzeć jak na aproksymację klasy grafów bez k rozłącznych cykli. Jeśli oznaczymy przez $\mathcal{H}_k$ grafy dla których istnieje zbiór co najwyżej k wierzchołków po których usunięciu graf staje się lasem (możemy je nazywać *k-apeksowymi lasami*). $\mathcal{H}_k$ jest zamkniętą na branie minorów klasą grafów, która spełnia

$$\mathcal{H}_{k-1} \subseteq \mathcal{C}_k \subseteq \mathcal{H}_{f(k)}.$$

Funkcja f z twierdzenia Erdősa-Pósa może być nawet $O(n \log n)$, a można znaleźć np. w rozdziale 2. książki Diestela. My jednak udowodnimy to twierdzenie, z dużo szybciej rosnącą funkcją, na drodze do dowodu twierdzenia o kracie, o którym poniżej.


 RYSUNEK 5. Graf z klasy $\mathcal{H}_k$.

Kolejny przykład dotyczy grafów, które nie zawierają dużej kraty jako minoru.

Twierdzenie 3.5 (o kracie, Robertson-Seymour, 1986). *Istnieje taka funkcja f , że dla każdego grafu G i dla każdego k jeśli krata $\boxplus_k$ nie jest minorem G , to $\text{tw}(G) \leq f(k)$.*

Łatwo zauważyć, że każdy graf planarny jest minorem pewnej kraty. Otrzymujemy więc następujący wniosek.

Wniosek 3.6. *Istnieje taka funkcja f , że dla każdego grafu planarnego H jeśli $H \not\leq G$, to $\text{tw}(G) \leq f(H)$.*

Ćwiczenie (3.9). Jak duża krata jest potrzebna, aby każdy n -wierzchołkowy graf planarny był jej minorem?

Z drugiej strony jeśli rozważymy graf nieplanarny H to klasa grafów niezawierających H jako minoru zawiera wszystkie grafy planarne i w szczególności wszystkie kraty. A więc grafy z takiej klasy mają nieograniczoną szerokość drzewiastą. Otrzymujemy więc charakteryzację grafów planarnych.

Wniosek 3.7. *Dla każdego grafu H następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Grafy bez H -minoru mają ograniczoną szerokość drzewiastą;*
- (ii) *H jest planarny.*

Ponieważ kraty mają dowolnie dużą szerokość drzewiastą (Ćwiczenie 2.8) twierdzenie daje nam kolejne jakościowe twierdzenie strukturalne. Niech $\text{Forb}(H) = \{G \mid H \not\leq G\}$ i niech $\mathcal{Z}_k$ będzie klasą grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej k . Wtedy istnieją funkcje f i g takie, że

$$\text{Forb}(\boxplus_k) \subseteq \mathcal{Z}_{f(k)} \subseteq \text{Forb}(\boxplus_{g(f(k))}).$$

Ostatni przykład jest topologiczny i dotyczy grafów zanurzalnych w powierzchnie. Oznaczmy przez $\mathcal{G}_k$ klasę grafów niezawierających k rozłącznych podgrafów nieplanarnych, a przez $\mathcal{S}_k$ klasę powierzchni, w których nie da się zanurzyć k rozłącznych nieplanarnych grafów.

Twierdzenie 3.8 (Robertson, Seymour). *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego grafu G jeśli $G \in \mathcal{G}_k$, to istnieje podzbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leq f(k)$ oraz $G - X$ da się zanurzyć w powierzchnię z $\mathcal{S}_k$.*

W oczywisty sposób jeśli G jest takim grafem, że po usunięciu co najwyżej $f(k)$ wierzchołków otrzymamy graf zanurzalny w powierzchnię z $\mathcal{S}_k$, to G zawiera co najwyżej $f(k) + k$ rozłącznych nieplanarnych podgrafów, więc nieformalnie twierdzenie 3.8 implikuje, że graf nie zawiera wielu rozłącznych nieplanarnych podgrafów wtedy i tylko wtedy, gdy z G da się usunąć niewiele wierzchołków aby otrzymać graf zanurzalny w powierzchnię o ograniczonym genusie.

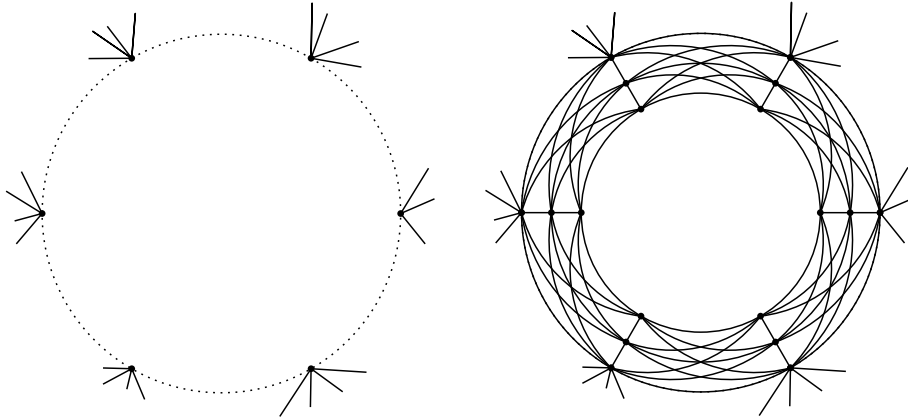
3.2. Konstrukcje. Niech $\mathcal{G}$ będzie klasą zamkniętą na branie minorów. Wówczas mówimy, że graf G

Niech G i H będą rozłącznymi grafami. Niech X będzie kliką w G , a Y kliką w H , gdzie $|X| = |Y|$. Sumą G i H wzdłuż X i Y jest graf powstały z tych grafów po identyfikacji wierzchołków X z wierzchołkami Y (zgodnie z ustaloną bijekcją), oraz być może usunięcie niektórych krawędzi zidentyfikowanej klik.

Ćwiczenie (3.8). Niech $\mathcal{G}$ będzie zamkniętą na branie minorów klasą grafów, a $\mathcal{G}^*$ jej domknięciem na sumowanie wzdłuż klik.

- (1) Wykazać, że $\mathcal{G}^*$ jest zamknięta na branie minorów
- (2) Wykazać, że jeśli $K_n \notin \mathcal{G}$, to $K_n \notin \mathcal{G}^*$.
- (3) Wykazać, że jeśli $\mathcal{G}$ jest klasą wszystkich grafów mających co najwyżej $k + 1$ wierzchołków, to $\mathcal{G}^*$ jest klasą wszystkich grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej k .

Niech G będzie grafem zanurzonym w powierzchnię z brzegiem $\Sigma(h, c; l)$ oraz niech L będzie jedną z l dziur. Załóżmy, że na brzegu L leżą wierzchołki $v_{1,1}, v_{2,1}, \dots, v_{k,1}$, w tej kolejności. Konstruujemy nowy graf G' , poprzez dodanie nowych wierzchołków $v_{i,j}$ dla $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{2, \dots, t\}$ oraz krawędzi między każdą parą różnych wierzchołków $v_{i,j}, v_{i',j'}$ gdzie $i' \in \{i - 1, i, i + 1\}$ (indeksy należy interpretować cyklicznie). Mówimy wówczas, że otrzymany graf G' powstał z G poprzez *dodanie wiru o głębokości t w dziurę L* .



RYSUNEK 6. Dodanie wiru o głębokości 3 do grafu mającego 6 wierzchołków na brzegu dziury.

Mówimy, że graf G powstał z grafu H przez dodanie co najwyżej k apeksów, jeśli istnieje zbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leq k$ oraz $G - X = H$.

Obserwacja 3.9. *Niech $\mathcal{G}$ będzie klasą zamkniętą na branie minorów, a $\mathcal{G}^k$ klasą grafów otrzymanych z grafów z $\mathcal{G}$ przez dodanie co najwyżej k apeksów. Wówczas $\mathcal{G}^k$ jest klasą zamkniętą na branie minorów oraz jeśli $\mathcal{G}$ nie zawiera K_n , to $\mathcal{G}^k$ nie zawiera K_{n+k} .*

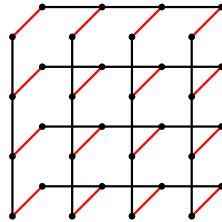
3.3. Strukturalne twierdzenie o grafach. Niech $n \geq 0$. Niech $\mathcal{S}(n)$ będzie zbiorem powierzchni z brzegiem o genusie Eulera co najwyżej n i o co najwyżej n dziurach. Niech $\mathcal{G}_1(n)$ oznacza klasę grafów, które da się zanurzyć w powierzchni z $\mathcal{S}(n)$. Niech $\mathcal{G}_2(n)$ oznacza klasę grafów otrzymanych przez dodanie wiru o głębokości n do grafów w klasie $\mathcal{G}_1(n)$. Niech $\mathcal{G}_3(n)$ oznacza klasę grafów otrzymanych z grafów z $\mathcal{G}_4(n)$ przez dodanie n apeksów. Niech $\mathcal{G}_4(n)$ oznacza domknięcie klasy $\mathcal{G}_3(n)$ na klejenie wzdłuż klik. Niech $\mathcal{G}(n)$ oznacza domknięcie $\mathcal{G}_4(n)$ na branie minorów.

Twierdzenie 3.10 (Strukturalne twierdzenie o grafach). *Dla każdej liczby $t \geq 1$ istnieje taka liczba $n \geq 0$, że wszystkie grafy bez K_t -minoru są zawarte w $\mathcal{G}(n)$.*

Gdyby dla jakiegoś $n \geq 0$ klasa $\mathcal{G}(n)$ zawierała wszystkie grafy, to strukturalne twierdzenie o grafach byłoby spełnione w sposób trywialny. Aby wykazać, że tak nie jest, wystarczy wykazać, że dla każdego n istnieje graf, który nie jest minorem grafu z klasy $\mathcal{G}_2(n)$.

Twierdzenie 3.11 (Ringel-Youngs). *Niech Σ będzie powierzchnią o genusie Eulera g oraz $t \geq 3$. Wówczas graf pełny K_t da się zanurzyć w Σ wtedy i tylko wtedy, gdy $(t-3)(t-4) \leq 6g$.*

To, że K_t da się zanurzyć tylko w powierzchni o genusie co najmniej $(t-3)(t-4)$ wynika z nierówności Eulera dla powierzchni, która mówi, że jeżeli graf G da się zanurzyć w powierzchnię o genusie g , to $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 + 3g$. Druga implikacja jest dużo trudniejsza do wykazania, wykażemy ją jedynie z dokładnością do czynnika multiplikatywnego – wykażemy, że K_t da się zanurzyć w każdą powierzchnię o genusie Eulera co najmniej $2(t-1)^2$. Rozszczepioną kratą $t \times t$ nazywamy graf otrzymany z dwóch kopii kraty $t \times t$, przez połączenie odpowiadających sobie wierzchołków w obu kratkach oraz usunięciu wszystkich poziomych krawędzi w jednej kratce i wszystkich pionowych krawędzi w drugiej kratce.



RYSUNEK 7. Rozszczepiona kratka 4×4 .

Rozszczepioną kratą $t \times t$ można narysować na płaszczyźnie tak, żeby było jedynie $(t-1)^2$ skrzyżowań, a powierzchnia o genusie co najmniej $2(t-1)^2$ ma co najmniej $(t-1)^2$ rączek (być może skręconych), więc da się w nią zanurzyć rozszczepioną kratę $t \times t$. Graf pełny K_t jest minorem rozszczepionej kraty $t \times t$, więc również da się go zanurzyć w każdą powierzchnię o genusie co najmniej $2(t-1)^2$.

Twierdzenie 3.12. *Dla każdego n istnieje takie $t = t(n)$, że klasa $\mathcal{G}(n)$ nie zawiera grafu K_t .*

Dowód. Jeżeli $K_t \in \mathcal{G}(n)$, to pewien graf z klasy $\mathcal{G}_4(n)$ ma K_t -minor, więc któryś graf z $\mathcal{G}_3(n)$ ma K_t -minor, co z kolei oznacza, że pewien graf z $\mathcal{G}_2(n)$ ma K_{t-n} -minor. Jeśli więc wykazemy, że dla każdego n istnieje takie $t_2 = t_2(n)$, że grafy z $\mathcal{G}_2(n)$ nie mają K_{t_2} -minorów, to teza zadania będzie zachodzić dla $t(n) = t_2(n) + n$.

Niech $f(g, \ell, n) = (2g + \ell) \cdot (3n + 1)$. Wykażemy indukcyjnie względem wartości $2g + \ell$, że jeżeli G jest grafem zanurzonym w powierzchnię $\Sigma(h, c; \ell)$ o genusie g w taki sposób, że każdy wierzchołek leży na jednej z ℓ dziur, to w grafie $\tilde{G}$ otrzymanym z G przez dodanie wiru o głębokości n nie ma $K_{f(g, \ell, n)}$ -minoru.

Jeżeli $2g + \ell = 1$ to mamy do czynienia z grafem zanurzonym w dysku, gdzie wszystkie wierzchołki leżą na brzegu dysku. Szerokość drzewiasta grafów zewnętrznie planarnych wynosi co najwyżej 2, więc po dodaniu wiru o głębokości n otrzymujemy graf, którego szerokość drzewiasta wynosi co najwyżej $3n - 1$, więc nie ma w nim K_{3n+1} -minoru.

Założmy więc, że $2g + \ell > 1$. W przypadku, gdy $\ell \geq 2$ i w G istnieje krawędź $e = xy$ między wierzchołkami leżącymi na dwóch różnych dziurach, rozważmy graf $G_0 = G - \{x, y\}$. Graf ten w naturalny sposób można zanurzyć w powierzchnię $\Sigma(h, c; \ell - 1)$ oraz dla zbioru $X \subseteq V(\tilde{G})$ składającego się z wierzchołków x, y oraz stowarzyszonych wierzchołków w wirach zachodzi:

$$\tilde{G} - X \subseteq \tilde{G}_0,$$

więc z założenia indukcyjnego w $\tilde{G}$ nie ma K_t -minoru dla $t = (2g + \ell - 1)(3n + 1) + |X|$, czyli $t \leq f(g, \ell, n)$.

Jeżeli w G nie ma krawędzi łączącej różne dziury, to albo istnieje krawędź e o obu końcach na jednej murze po której usunięciu powierzchnia jest spójna, albo każda składowa grafu $\tilde{G}$ powstała przez dodanie wiru do grafu zanurzonego w $\Sigma(0, 0; 1)$. W pierwszym przypadku prowadząc rozumowanie podobne do tego powyżej możemy wykazać, że $\tilde{G}$ nie ma K_t -minoru dla $t = f(g - 1, \ell, 2) + 2n$, a w tym drugim wiemy, że w grafie $\tilde{G}$ nie ma K_{3n+1} -minoru. To kończy dowód indukcyjny.

Teraz, wykazemy, że możemy wybrać $t_2(n) = \lceil 3\sqrt{n} + 4 \rceil + f(n, n, n)$

Założmy, że dla pewnego grafu G zanurzonego w $\Sigma(h, c, n)$ graf $\tilde{G}$ powstały przez dodanie wirów o głębokości n zawiera K_{t_2} -minor i weźmy minimalny w relacji $\prec$ taki graf. Wówczas w modelu grafu K_{t_2} w grafie $\tilde{G}$ każdy worek albo jest singletonem, albo ma każdy wierzchołek na jednej z ℓ dziur. Usuwając singletony, których na mocy twierdzenia 3.11 jest nie więcej niż $\lceil 3\sqrt{n} + 4 \rceil$, dostajemy graf o wszystkich wierzchołkach na dziurach, więc na mocy tego co wykazaliśmy wcześniej jest nie ma on $K_{f(n, n, n)}$ -minoru.

□

4. TWIERDZENIE MENGERA

Ścieżka $P = v_0 \dots v_k$ jest A - B *ścieżką*, jeśli $V(P) \cap A = \{v_0\}$ oraz $V(P) \cap B = \{v_k\}$. Zbiór $X \subseteq V(G)$ *separuje* zbiory A i B w G , jeśli każda A - B ścieżka w G jeśli każda A - B ścieżka w G zawiera wierzchołek w X . Mówimy wtedy, że X jest A - B *separatorom*.

Twierdzenie 4.1 (Menger, 1927). *Niech G będzie grafem i niech $A, B \subseteq V(G)$. Wtedy minimalna liczba wierzchołków separujących A i B równa się maksymalnej liczbie rozłącznych A - B ścieżek.*

Poniżej podajemy ilustrację użyteczności twierdzenia Menger'a (oraz istnienia modelu dużej klikli jako minoru w grafie).

Niech G będzie grafem, a $X \subseteq V(G)$ podzbiorem zbioru jego wierzchołków. Mówimy, że X jest *połączony* w G jeśli dla dowolnego $l \geq 1$ oraz dla dowolnych różnych wierzchołków $s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_l$ w X istnieją rozłączne wierzchołkowo ścieżki $P_1, \dots, P_l$ w G takie, że P_i ma końce w s_i i t_i oraz nie ma wierzchołków wewnętrznych w X . Jeśli graf G spełnia $|V(G)| \geq 2k$ oraz każdy podzbiór $X \subseteq V(G)$ o mocy co najwyżej $2k$ jest połączony, to mówimy, że G jest k -*połączony*.

Zatem grafy k -połączone są $(2k - 1)$ -spójne. Okazuje się, że również odpowiednio duża spójność grafu gwarantuje jego k -połączoność.

Twierdzenie 4.2 (Jung, 1970; Larman i Mani 1970). *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geq 1$ każdy graf $f(k)$ -spójny jest k -połączony.*

Dowód. Niech $f(k) = h(3k) + 2k$, gdzie $h(r)$ jest taką liczbą, że każdy graf o średnim stopniu co najmniej $h(r)$ zawiera K_r jako minor topologiczny. Na ćwiczeniach widzieliśmy, że możemy wziąć $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$ (patrz Zadanie 1.5). Tak naprawdę wystarczy wziąć $h(r) = O(r^2)$, i nie da się lepiej, co pierwsze pokazali Bollobás i Thomason (1998).

Wykażemy, że f spełnia warunek z tezy. Niech G będzie grafem $f(k)$ -spójnym. Wówczas G zawiera K_{3k} jako minor topologiczny. Niech U będzie zbiorem wierzchołków rozgałęziających modelu takiego minoru. Weźmy dowolne różne wierzchołki $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ w G . G jest $2k$ -spójny, więc na mocy twierdzenia Menger'a istnieje rodzina wierzchołkowo rozłącznych ścieżek $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k\}$ taka, że

- każda ścieżka P_i ma jeden koniec w s_i ,
- każda ścieżka Q_i ma jeden koniec w t_i , oraz
- każda ścieżka w $\mathcal{P}$ ma jeden koniec w U i nie ma wierzchołków wewnętrznych w U .

Wybieramy $\mathcal{P}$ w taki sposób, żeby zminimalizować liczbę krawędzi poza ustalonym modelem topologicznym K_{3k}

Niech $u_1, \dots, u_k \in U$ będą dowolnymi wierzchołkami wolnymi od ścieżek w $\mathcal{P}$. Ustalmy $i \in \{1, \dots, k\}$. Niech $u \in U$ będzie końcem P_i w U , a $u' \in U$ końcem Q_i w U . Niech L_i będzie $u_i u$ -ścieżką, a M_i będzie $u_i u'$ -ścieżką reprezentującymi krawędzie w naszym modelu. Z wyboru rodziny $\mathcal{P}$ wynika, że ścieżki postaci $s_i P_i u L_i u_i M_i u' Q_i t_i$, dla $i \in [k]$ są parami rozłącznymi ścieżkami łączącymi pary wierzchołków s_i, t_i . $\square$

Powyższy dowód gwarantuje istnienie funkcji $f(k) = O(k^2)$. Wiadomo już, że wystarczy wziąć f liniowe od k .

Twierdzenie 4.3 (Thomas i Wollan, 2005). *Niech G będzie grafem i $k \geq 1$. Jeśli G jest $2k$ -spójny oraz $d(G) \geq 16k$, to G jest k -połączony. Zatem grafy $16k$ -spójne są k -połączone.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w w trzecim rozdziale książki Diestela.

5. DUALNOŚĆ SZEROKOŚCI DRZEWIASTEJ

Jaka jest szerokość drzewiasta kraty $\boxplus_n$? Jak pokazać ograniczenie dolne? Z dużym wysiłkiem pokazaliśmy, że $\text{tw}(\boxplus_n) \geq \frac{1}{3}n$ (Zadanie 2.8). Magia szerokości drzewiastej polega na tym, iż istnieje kanoniczna przeszkoda w grafie na drodze do posiadania szerokości drzewiastej co najwyżej k .

Dwa podzbiory wierzchołków $A, B \subseteq V(G)$ *dotykają się*, jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ lub istnieje A - B krawędź.

Rodzinę spójnych podzbiorów $V(G)$ takich, że każde dwa się dotykają, nazywamy *jeżyną* w G . Zbiór $X \subseteq V(G)$ *trafia* jeżynę $\mathcal{B}$, jeśli dla każdego $B \in \mathcal{B}$ zachodzi $X \cap B \neq \emptyset$. *Rząd* jeżyny $\mathcal{B}$ to wielkość najmniejszego zbioru trafiającego $\mathcal{B}$. *Liczba jeżynowa* grafu G oznaczana $\text{bn}(G)$ to największy rząd jeżyny w G .

Przykład 5.1. Krzyżem C_{ij} w kratce $\boxplus_n$ nazywamy zbiór $\{(i, l) \mid l \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{(l, j) \mid l \in \{1, \dots, n\}\}$. Zbiór wszystkich krzyży w kratce $\boxplus_n$ jest jeżyną rzędu n .

Twierdzenie 5.2 (o dualności szerokości drzewiastej. Seymour, Thomas, 1993). *Dla każdego $k \geq 1$, dla każdego G zachodzi*

$$\text{tw}(G) \geq k \iff G \text{ ma jeżynę rzędu większego niż } k.$$

Równoważnie $\text{tw}(G) = \text{bn}(G) - 1$.

Dowód. Implikacja $\Leftarrow$:

Niech G będzie grafem o szerokości drzewiastej mniejszej niż k , a $\mathcal{B}$ jeżyną w G . Wykażemy, że każda dekompozycja drzewiasta $(T, \mathcal{V})$ grafu G ma worek trafiający $\mathcal{B}$, więc $\mathcal{B}$ ma rząd nie większy niż k . Dla każdego elementu $B \in \mathcal{B}$ niech $T_B = \{t \in T \mid \exists v \in B : v \in V_t\} \subseteq V(T)$. Dla dowolnych dwóch elementów $B, B' \in \mathcal{B}$ drzewa T_B oraz $T_{B'}$ się przecinają, więc z własności Helly'ego dla drzew istnieje $t \in V(T)$ taki, że worek V_t przecina się niepusto z każdym elementem jeżyny.

Implikacja $\Rightarrow$:

Niech $(T, (V_t)_{t \in V(T)})$ będzie dekompozycją drzewiastą grafu G . Jeśli x jest liściem T , $|V_x| > k$, oraz $xy \in E(T)$ to zbiór $V_x - V_y$ nazywamy *płatkiem* wierzchołka X . Mówimy, że dekompozycja drzewiasta jest *dobra*, jeśli

- istnieje $t \in V(T)$ taki, że $|V_t| \leq k$,
- dla każdego wężła wewnętrznego t drzewa T zachodzi $|V_t| \leq k$.

Wówczas w dobrych dekompozycjach drzewiastych płatki są niepuste.

Lemat 5.3. *Niech $(T_1, \mathcal{V}_1)$ i $(T_2, \mathcal{V}_2)$ będą dobrymi dekompozycjami drzewiastymi grafu G takimi, że $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$. Niech X będzie płatkiem dla liścia x w T_1 , a Y płatkiem dla liścia y w T_2 . Załóżmy, że*

- $V_x^1 = X \cup N(X)$ to worek x w $(T_1, \mathcal{V}_1)$,
- $V_y^2 = Y \cup N(Y)$ to worek y w $(T_2, \mathcal{V}_2)$,
- żaden płatek w $(T_1, \mathcal{V}_1)$ nie zawiera Y ,
- żaden płatek w $(T_2, \mathcal{V}_2)$ nie zawiera X ,
- X i Y się nie dotykają w G .

Wtedy istnieje dobra dekompozycja drzewiasta $(T, \mathcal{U})$ taka, że

- każdy płatek dekompozycji $(T, \mathcal{U})$ zawiera się w płatku dekompozycji $(T_1, \mathcal{V}_1)$ lub w płatku dekompozycji $(T_2, \mathcal{V}_2)$,
- X ani Y nie są płatkami $(T, \mathcal{U})$.

Dowód lematu. Zbiory X oraz Y się nie dotykają, więc $N(X)$ jest rozłączne z Y (i z X), czyli $N(X)$ separuje X i Y . Parę (G_1, G_2) nazywamy separacją grafu G , jeśli $G = G_1 \cup G_2$ oraz $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$.

Niech (A, B) będzie separacją G taką, że $X \subseteq V(A) - V(B)$, $Y \subseteq V(B) - V(A)$, oraz rząd (A, B) jest najmniejszy możliwy. Niech $S = A \cap B$. $N(X)$ separuje X i Y , więc z minimalności mamy $|S| \leq k$. Z twierdzenia Menger'a możemy wybrać dla każdego $s \in S$ S - $N(X)$ ścieżkę P_s w $G[A]$ w taki sposób, że s jest końcem ścieżki P_s wybrane ścieżki są rozłączne wierzchołkowo. W analogiczny sposób wybieramy rozłączne S - $N(Y)$ ścieżki Q_s dla wszystkich $s \in S$ w taki sposób, że s jest końcem ścieżki Q_s .

Niech H będzie minorem G otrzymanym przez usunięcie wierzchołków ze zbioru $V(A) - \bigcup_{s \in S} V(P_s)$ oraz kontrakcję każdej ścieżki P_s do wierzchołka s . Niech $(T_1, \mathcal{V}_1')$ będzie dobrą dekompozycją drzewiastą grafu H indukowaną przez $(T_1, \mathcal{V}_1)$, to znaczy niech $\mathcal{V}_1' = (V_t^{1'})_{t \in V(T_1)}$, gdzie dla każdego $t \in V(T_1)$ mamy $V_t^{1'} = (V_t^1 \cap V(B)) \cup \{s \in S \mid V_t^1 \cap V(P_s) \neq \emptyset\}$ czyli w szczególności $V_x^{1'} = S$. W analogiczny sposób konstruujemy dobrą dekompozycję drzewiastą $(T_2, \mathcal{V}_2')$ grafu J , gdzie J jest minorem grafu G otrzymanego przez usunięcie wierzchołków ze zbioru $V(B) - \bigcup_{s \in S} V(Q_s)$ oraz kontrakcję każdej ścieżki Q_s do pojedynczego wierzchołka s .

Niech T będzie drzewem otrzymanym z T_1 i T_2 przez utożsamienie węzłów x i y . Oznaczmy przez r utożsamiony wierzchołek w T . Połóżmy

$$U_r = S \quad \text{oraz} \quad U_t = \begin{cases} V_t^{1'}, & \text{jeśli } t \in V(T_1) \\ V_t^{2'}, & \text{jeśli } t \in V(T_2). \end{cases}$$

Wówczas $(T, \mathcal{U})$ jest taką dekompozycją drzewiastą grafu G , że r jest węzłem wewnętrznym T oraz każdy węzeł drzewa T różny od r jest wierzchołkiem wewnętrznym któregoś z drzew T_1 lub T_2 . Można więc łatwo pokazać, że $(T, \mathcal{U})$ jest dobrą dekompozycją drzewiastą.

Pozostaje więc pokazać, że tak dekompozycja spełnia warunki lematu. Niech Z będzie płatkami dekompozycji $(T, \mathcal{U})$ odpowiadającym liściowi z . Bez straty ogólności zakładamy $z \in V(T_1)$. Niech z' będzie jedynym sąsiadem z w T . Wówczas $Z = U_z - U_{z'}$, więc Z jest rozłączny ze zbiorem S . Stąd Z zawiera się w pewnym płatku dekompozycji $(T, \mathcal{V}_1)$. Łatwo można też pokazać, że X ani Y nie są płatkami $(T, \mathcal{U})$, więc dowód lematu jest zakończony. $\square$

Wracamy do dowodu twierdzenia 5.2.

Niech $\mathcal{B}$ będzie minimalnym na inkluzję zbiorem płatków dobrych dekompozycji drzewiastych grafu G o tej własności, że

- (i) $\mathcal{B}$ zawiera płatek z każdej dobrej dekompozycji drzewiastej
- (ii) $\mathcal{B}$ jest zamknięty na nadzbiory w płatkach, to jest jeśli dla pewnych dwóch płatków X, X' dobrych dekompozycji drzewiastych zachodzi $X \subseteq X'$ oraz $X \in \mathcal{B}$, to $X' \in \mathcal{B}$.

Niech $\mathcal{B}'$ będzie rodziną takich płatków X należących do $\mathcal{B}$, że graf indukowany przez X w G jest spójny.

Wykażemy, że $\mathcal{B}'$ jest szukaną jeżyną rzędu większego niż k . Zakładamy nie wprost, że istnieje podzbiór $S \subseteq V(G)$, o mocy co najwyżej k , który nie trafia w $\mathcal{B}'$. Wówczas jeśli $G - S$ ma składowe $C_1, \dots, C_n$, to gwiazda o n liściach, w której wierzchołki mają przypisane worki $S, S \cup V(C_1), \dots, S \cup V(C_n)$, byłaby dobrą dekompozycją drzewiastą, co przeczy własności (i) rodziny $\mathcal{B}$.

Pozostaje pokazać, że każde dwa zbiory w $\mathcal{B}'$ się dotykają. Załóżmy nie wprost, że istnieją płatki X oraz Y które się nie dotykają. Wybieramy je w taki sposób, żeby były minimalne na inkluzję w $\mathcal{B}'$. Skoro $\mathcal{B} - \{X\}$ nie spełnia (i), to istnieje dobra dekompozycja drzewiasta $(T_1, \mathcal{V}_1)$, której jedyny płatek w $\mathcal{B}'$ to X . Analogicznie istnieje dobra dekompozycja drzewiasta $(T_2, \mathcal{V}_2)$, której jedyny płatek w $\mathcal{B}'$ to Y . Aplikując lemat dostajemy sprzeczność z konstrukcją $\mathcal{B}'$, co kończy dowód. $\square$

6. SZEROKOŚĆ GAŁĘZIOWA, ZBIORY WYSOCE SPÓJNE

Niech G będzie grafem, a $A, B \subseteq G$ dwoma jego podgrafami. Para (A, B) jest *separacją* G jeśli $A \cup B = G$ oraz $E(A) \cap E(B) = \emptyset$. *Rząd* separacji (A, B) oznaczany $\text{ord}(A, B)$ równy jest $|V(A) \cap V(B)|$. k -*separacją* grafu G to separacja o rzędzie co najwyżej k .

Twierdzenie 6.1 (Menger, równoważne sformułowanie). *Niech G będzie grafem oraz $X, Y \subseteq V(G)$. Wtedy minimalny rząd separacji (A, B) grafu G takiej, że $X \subseteq V(A)$ i $Y \subseteq V(B)$ równa się maksymalnej liczbie rozłącznych X - Y ścieżek w G .*

Para (T, Θ) jest *dekompozycją gałęziową* grafu G , jeśli

- T jest drzewem, w którym każdy wierzchołek wewnętrzny ma stopień co najwyżej 3.
- Θ jest bijekcją z $E(G)$ do liści T .

Wierzchołek $v \in V(G)$ leży w *poprzek* krawędzi $\xi \in E(T)$, jeśli istnieją krawędzie $vu, vw \in E(G)$ takie, że wierzchołki $\Theta(vu)$ i $\Theta(vw)$ leżą w różnych składowych lasu $T - \xi$. *Rząd* krawędzi $\xi \in E(T)$ to liczba wierzchołków leżących w poprzek ξ . *Szerokość* dekompozycji gałęziowej (T, Θ) grafu G to największy rząd krawędzi w T . *Szerokość gałęziowa* (ang. branchwidth) grafu G to najmniejsza szerokość dekompozycji gałęziowej G .

Obserwacja 6.2 (Robertson, Seymour; Graph Minors X, 1991). *Dla każdego grafu G , jeśli $\text{bw}(G) \geq 2$, to*

$$\text{bw}(G) \leq \text{tw}(G) + 1 \leq \frac{3}{2} \text{bw}(G).$$

Dowód. Wykażemy najpierw drugą nierówność: $\text{tw}(G) + 1 \leq \frac{3}{2} \text{bw}(G)$. Zakładamy, że G nie ma wierzchołków izolowanych. Niech $k = \text{bw}(G)$ i niech (T, Θ) będzie dekompozycją gałęziową o szerokości k .

Konstruujemy dekompozycję drzewiastą $(T, (B_t)_{t \in V(T)})$ grafu G , definiując $B_t = \{v, w\}$ jeśli t jest liściem oraz $\Theta(uv) = t$. Jeśli t jest wierzchołkiem wewnętrznym, to definiujemy B_t jako zbiór wierzchołków v leżących w poprzek jakiejś krawędzi przylegających do t . Wówczas $|B_t| \leq \frac{3}{2}k$, co kończy dowód drugiej nierówności.

Dla dowodu pierwszej nierówności weźmy dekompozycję drzewiastą $(T, \mathcal{B})$ o workach rozmiaru co najwyżej $\text{tw}(G) + 1$. Możemy łatwo skonstruować dekompozycję gałęziową o małej szerokości (ćwiczenie). $\square$

Niech G będzie grafem. Zbiór $X \subseteq V(G)$ jest *wysoce spójny*, jeśli dla dowolnych $X_1, X_2 \subseteq X$ istnieje $\min(|X_1|, |X_2|)$ rozłącznych wierzchołkowo X_1 - X_2 ścieżek w G (można założyć, że ścieżki nie mają wierzchołków wewnętrznych w X).

Przykład 6.3. Pierwsza kolumna kraty $\boxplus_k$ jest zbiorem wysoce spójnym.

Lemat 6.4. *Dla każdego grafu G , jeśli $\text{bw}(G) \leq k$, to G nie ma zbioru wysoce spójnego wielkości $3k + 1$.*

Dowód. Niech (T, Θ) będzie dekompozycją drzewiastą grafu G o szerokości co najwyżej k . Załóżmy, że G ma zbiór X wysoce spójny mocy większej niż $2k$. Dla dowolnej krawędzi $e = tt' \in E(T)$ niech G_{et} będzie podgrafem G indukowanym przez takie wierzchołki w , dla których istnieje krawędź ww' grafu G , że $\Theta(ww')$ leży w tej samej składowej lasu $T - e$, co t . Wówczas zachodzi dokładnie jedna z nierówności $|V(G_{et}) \cap X| \leq k$ i $|V(G_{et'}) \cap X| \leq k$. Orientujemy każdą z krawędzi drzewa T w tym kierunku, gdzie X ma więcej niż k wierzchołków. Orientacja drzewa T musi mieć ujście, a w tym ujściu spotykają się co najwyżej 3 krawędzie, więc $|X| \leq 3k$. $\square$

Lemat 6.5. *Dla każdego grafu G jeśli $\text{bw}(G) > k \geq 2$, to G ma zbiór wysoce spójny rozmiaru k .*

Dowód. Częściową dekompozycją gałęziową grafu G nazywamy taką parę (T, Θ) , że T jest drzewem w którym każdy wierzchołek wewnętrzny ma stopień 3 oraz Θ jest suriekcją z $E(G)$ do liści T . Szerokość częściowej dekompozycji gałęziowej definiujemy w sposób analogiczny do zwykłej dekompozycji gałęziowej. Wybierzmy częściową dekompozycję (T, Θ) o szerokości co najwyżej k i o jak największej liczbie liści. Taka częściowa dekompozycja istnieje, bo możemy wziąć drzewo o dwóch wierzchołkach, gdzie jeden liść ma przypisaną dowolną krawędź e grafu G , a drugi wszystkie pozostałe. Skoro $\text{bw}(G) > k$, to (T, Θ) ma liść t etykietowany więcej niż jedną krawędzią. Niech ξ będzie jedyną krawędzią drzewa T przylegającą do t , a F będzie zbiorem krawędzi, którymi jest etykietowany liść t . Niech X będzie zbiorem wierzchołków idących w poprzek ξ . Wykażemy, że $|X| \geq k$ oraz że X jest wysoce połączony w $G[F]$.

Założmy najpierw, że $|X| < k$. Wówczas możemy otrzymać nową częściową dekompozycję grafu G zastępując liść t dwoma liśćmi, z których jeden jest etykietowany pojedynczą krawędzią $e \in F$, a drugi zbiorem $F - \{e\}$. Otrzymana dekompozycja ma szerokość nie większą niż k oraz ma więcej liści niż (T, Θ) – sprzeczność.

Założmy teraz, że $|X| \geq k$ i X nie jest wysoce spójny w $G[F]$. Wówczas istnieją takie podzbiory $X_1, X_2 \subseteq X$, że w $G[F]$ nie ma $t = \min\{|X_1|, |X_2|\}$ rozłącznych X_1 - X_2 ścieżek w $G[F]$. Na mocy twierdzenia Menger'a istnieje separacja (A, B) o rzędzie mniejszym niż t taka, że $X_1 \subseteq V(A)$ oraz $X_2 \subseteq V(B)$. Zastępując liść t dwoma liśćmi etykietowanymi zbiorami $E(A)$ i $E(B)$ otrzymujemy dekompozycję o nie większej szerokości i większej liczbie liści niż (T, Θ) , co jest sprzecznością.

$\square$

7. SPLĄTANIE

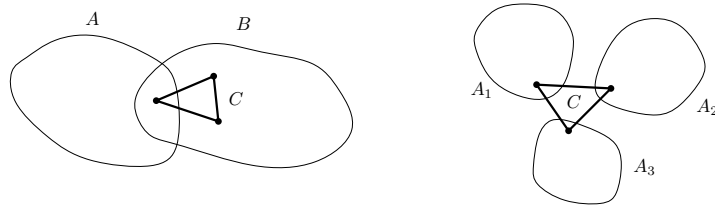
7.1. Przykłady i dualność z dekompozycją gałęziową. *Splątaniem* rzędu k grafu G nazywamy taką rodzinę $(k - 1)$ -separacji $\mathcal{T}$ grafu G , dla której spełnione są warunki

- (T1) $(A, B) \in \mathcal{T}$ lub $(B, A) \in \mathcal{T}$ dla dowolnej $(k - 1)$ -separacji (A, B) grafu G ,
- (T2) jeśli $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}$, to $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$.
- (T3) $V(A) \neq V(G)$ dla każdej $(A, B) \in \mathcal{T}$.

Dla dowolnej separacji (A, B) w splątaniu mówimy, że A jest *małą stroną*, a B jest *dużą stroną* separacji. Maksymalny rząd splątania w grafie G oznaczamy przez $\text{tn}(G)$.

Przykład 7.1. Niech G będzie grafem i C cyklem w G . Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem wszystkich 1-separacji (A, B) grafu G takich, że $C \subseteq B$. Wtedy $\mathcal{T}$ jest splątaniem rzędu 2 w G .

Rzeczywiście, rodzina $\mathcal{T}$ spełnia warunek (T1) gdyż każda 1-separacja G zawiera dowolny cykl w G w jednej z dwu stron. Warunek (T3) jest również spełniony ponieważ $|V(C) \cap V(A)| \leq 1$ dla dowolnej $(A, B) \in \mathcal{T}$. Warunek (T2) zachodzi gdyż $E(C) \cap E(A) = \emptyset$ dla dowolnej $(A, B) \in \mathcal{T}$ a więc suma nawet siedemnastu małych stron nie da całego grafu. Uwaga: może się zdarzyć, że $V(A_1) \cup V(A_2) \cup V(A_3) = V(G)$ dla pewnych $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}$ (patrz Rysunek 8). Ale to nie przeszkadza rodzinie $\mathcal{T}$ być splątaniem.



RYSUNEK 8. Po lewej: cykl zawsze zawiera się w którejś części 1-separacji. Po prawej: trzy małe strony sumują się wierzchołkowo do całego grafu.

Przykład 7.2. Niech G będzie grafem i $X \subseteq V(G)$ zbiorem wierzchołków takich, że $G[X]$ jest kliką. Dla każdej (A, B) separacji G mamy: $X \subseteq V(A)$ lub $X \subseteq V(B)$. Niech $k \geq 1$ i niech $\mathcal{T}_k$ będzie zbiorem wszystkich separacji rzędu $< k$ takich, że $X \subseteq V(B)$. Wtedy jeśli $k < \frac{2}{3}|X| + 1$, to $\mathcal{T}_k$ jest splątaniem rzędu k w G .

Ustalmy $k < \frac{2}{3}|X| + 1$. Rzeczywiście rodzina $\mathcal{T}_k$ spełnia (T1) gdyż każda separacja G musi zostawić wierzchołki kliky po tej samej stronie. Warunek (T3) jest również spełniony ponieważ $|X \cap V(A)| \leq \frac{2}{3}|X|$ dla dowolnej $(A, B) \in \mathcal{T}$. Rozważmy warunek (T2). Rozważmy dowolne trzy separacje $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}_k$. Ponieważ rząd tych separacji jest mniejszy od $\frac{2}{3}|X|$ zawsze znajdziemy wierzchołek $x \in X$ taki, że x należy do co najwyżej jednego zbioru spośród $V(A_1), V(A_2)$ i $V(A_3)$, powiedzmy $V(A_1)$. Wtedy jednak wszystkie krawędzie z x do pozostałych wierzchołków w X mogą

znaleźć się jedynie w A_1 (nie mogą w A_2 , ani A_3). To oznacza, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$ a więc (T2) zachodzi.

Ćwiczenie (6.2). Niech $H \simeq \boxplus_k$. Rozważyć rodzinę $\mathcal{T}$ takich $(k-1)$ -separacji (A, B) grafu H , że B zawiera wiersz kraty H . Wykazać, że $\mathcal{T}$ jest splątaniem rzędu k w H .

Kolejne dwie obserwacje wiążą nam rząd największego splątania w grafie z jego szerokością gałęziową.

Obserwacja 7.3. *Dla dowolnego grafu G jeśli $\text{tn}(G) > 3$, to $\text{bw}(G) \geq \text{tn}(G)$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że spójny graf G ma splątanie rzędu większego niż k oraz dekompozycję o szerokości k . Każdą krawędź drzewa dekompozycji gałęziowej orientujemy w stronę dużej strony, zgodnie ze splątaniem. Otrzymany nieskierowany graf acykliczny musi mieć ujście. Jeżeli w ujściu spotykają się trzy krawędzie, to G jest sumą trzech małych stron splątania – sprzeczność, a jeśli liść jest ujściem, to pewna mała strona zawiera wszystkie wierzchołki grafu, co również jest sprzecznością. $\square$

Obserwacja 7.4. *Dla dowolnego grafu G zachodzi $\text{tn}(G) \geq \frac{1}{2} \text{bw}(G)$.*

Dowód. ćwiczenie. $\square$

Tak naprawdę zachodzi równość między dwoma rozważanymi parametrami.

Twierdzenie 7.5 (o dualności szerokości gałęziowej). *Dla dowolnego grafu G zachodzi $\text{bw}(G) = \text{tn}(G)$.*

Mogłoby się wydawać, że owa dualność jest powodem dla którego splątania są ważne. Nic bardziej mylnego. Dla wszystkich kolejnych twierdzeń wystarczy nam związanienie tn i bw jakie mamy dzięki dwóm poprzednim prostym obserwacjom. Splątania są ważne, gdyż możemy je rozplątać :) Zobaczymy twierdzenie o drzewie splątań, które zasadniczo daje nam strukturę drzewa pracującą w Strukturalnym twierdzeniu o Grafach. Niektórzy, też uważają że splątanie jest fajne bo daje nam w naturalny sposób strukturę matroidu...

7.2. Matroid ze splątania. Ustalmy splątanie $\mathcal{T}$ rzędu k w grafie G . Dla każdego zbioru wierzchołków $X \subseteq V(G)$ definiujemy wartość $\kappa(X)$ jako minimalny rząd separacji $(A, B) \in \mathcal{T}$ takiej, że $X \subseteq V(A)$, lub jako k jeżeli nie istnieje taka separacja. Tak zdefiniowana funkcja spełnia aksjomaty *funkcji rangi*, to znaczy

- $\kappa(\emptyset) = 0$,
- $\kappa(X) \leq \kappa(X \cup \{x\}) \leq \kappa(X) + 1$ dla dowolnych $X \subseteq V(G)$, $x \in V(G)$,
- $\kappa(X \cap Y) + \kappa(X \cup Y) \leq \kappa(X) + \kappa(Y)$ dla dowolnych $X, Y \subseteq V(G)$.

Pierwsze dwa punkty są łatwe do udowodnienia, a żeby wykazać trzeci punkt należy użyć nierówności submodularnej $\text{ord}(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2) + \text{ord}(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$, która zachodzi dla dowolnych separacji (A_1, B_1) i (A_2, B_2) (ćwiczenie).

Mówimy, że zbiór $X \subseteq V(G)$ jest *niezależny*, jeżeli $\kappa(X) = |X|$.

Twierdzenie 7.6 (własności zbiorów niezależnych).

- zbiór pusty $\emptyset$ jest niezależny,
- jeżeli $X \subseteq Y \subseteq V(G)$ oraz Y jest niezależny, to X też jest niezależny,
- dla dowolnych dwóch zbiorów niezależnych $X, Y \subseteq V(G)$, jeśli $|X| < |Y|$, to istnieje $y \in Y - X$ taki, że $X \cup \{y\}$ jest niezależny.

Lemat 7.7. Dla dowolnych dwóch zbiorów niezależnych $X, Y \subseteq V(G)$ istnieje $t = \min(|X|, |Y|)$ rozłącznych X - Y ścieżek.

Dowód. Załóżmy nie wprost, że nie istnieje t rozłącznych X - Y ścieżek. Wówczas na mocy twierdzenia Menger'a istnieje separacja $\{A, B\}$ taka, że $\text{ord}(A, B) < t$ oraz $X \subseteq V(A)$ i $Y \subseteq V(B)$. Gdyby A było małą stroną, to mielibyśmy $\kappa(X) \leq t < |X| = \kappa(X)$, więc A nie może być małą stroną. W analogiczny sposób można wykazać, że B również nie może być małą stroną, więc otrzymujemy sprzeczność. $\square$

Wniosek 7.8. Zbiory niezależne są wysoce spójne.

Zbiór $X \subseteq V(G)$ jest *domknięty*, jeżeli dla dowolnego $x \in V(G) - X$ zachodzi $\kappa(X \cup \{x\}) > \kappa(X)$. Dla każdego zbioru $X \subseteq V(G)$ istnieje dokładnie jeden zbiór domknięty Y taki, że $X \subseteq Y \subseteq V(G)$ oraz $\kappa(Y) = \kappa(X)$. Zbiór ten nazywamy *domknięciem* zbioru X .

Lemat 7.9. Niech (A, B) będzie taką separacją w $\mathcal{T}$, że $V(A)$ jest domknięty i $\kappa(V(A)) = \text{ord}(A, B)$. Wówczas, zbiór $X = V(A) \cap V(B)$ jest wysoce spójny w B .

Dowód. Jeśli zbiór X nie jest wysoce spójny w B , to istnieją zbiory X_1 oraz X_2 takie, że $X = X_1 \cup X_2$ dla których nie istnieje $t = \min(|X_1|, |X_2|)$ rozłącznych X_1 - X_2 ścieżek w B . Z twierdzenia Menger'a istnieje separacja (B_1, B_2) grafu B taka, że $X_i \subseteq V(B_i)$ i $\text{ord}(B_1, B_2) < t$. Z domkniętości $V(A)$ wynika, że separacje $(B_1, A \cup B_2)$ i $(B_2, A \cup B_1)$ (o rzędzie mniejszym niż $\text{ord}(A, B)$) są w splątaniu $\mathcal{T}$. To jednak prowadzi do sprzeczności, bo G jest sumą trzech małych stron $A \cup B_1 \cup B_2$. $\square$

Lemat 7.10 (o modelu drzewa po małej stronie separacji w splątaniu). Niech T będzie dowolnym drzewem o k wierzchołkach. Niech G będzie grafem, a $\mathcal{T}$ splątaniem w G o rzędzie większym niż k . Wtedy istnieje separacja $(A, B) \in \mathcal{T}$ taka, że

- zbiór $V(A)$ jest domknięty i $\kappa(V(A)) = \text{ord}(A, B) = k$ (W szczególności $V(A) \cap V(B)$ jest wysoce spójny w B .), oraz
- A zawiera model drzewa T ukorzeniony w $V(A) \cap V(B)$, to jest każdy wórek modelu zawiera wierzchołek w $V(A) \cap V(B)$.

Dowód. Dowodzimy indukcję względem k . Dla $k = 1$ twierdzenie jest prawdziwe, więc przechodzimy do kroku indukcyjnego. Wykażemy, że jeśli twierdzenie zachodzi dla $k - 1$, to zachodzi też dla k . Niech t będzie liściem drzewa T , a t' jego jedynym sąsiadem w T . Z założenia indukcyjnego dostajemy separację (A, B) grafu G taką, że

$V(A)$ jest domknięty i $\kappa(V(A)) = \text{ord}(A, B) = k - 1$ oraz model $(V_s)_{s \in V(T-t)}$ drzewa $T - t$ w grafie A ukorzeniony w $V(A) \cap V(B)$.

Niech wierzchołek x' będzie jedynym elementem zbioru $V_{t'} \cap V(A) \cap V(B)$. Gdyby x' nie miał żadnego sąsiada w $B - A$, to przerzucając x' razem z wychodzącymi krawędziami do małej strony dostalibyśmy nową separację (A', B') , która również należałaby do splątania $\mathcal{T}$ (ćwiczenie), miałaby rząd co najwyżej $k - 1$, a mała strona zawierałaby $V(A)$, co przeczyłoby domkniętości $V(A)$. Niech więc x będzie dowolnym sąsiadem x' w $B - A$. Kładąc $V_t = \{x\}$ dostajemy model $(V_s)_{s \in V(T)}$ drzewa T ukorzeniony w $(V(A) \cap V(B)) \cup \{x\}$. Skoro $V(A)$ jest domknięty, to $\kappa(V(A) \cup \{x\}) = \kappa(V(A)) + 1 = k$. Gdyby zbiór $V(A) \cup \{x\}$ był domknięty, to dowód byłby zakończony – separacja $(A \cup \{x'x\}, B)$ o rzędzie k spełniałaby warunki twierdzenia. Pokażemy jednak, że zawsze możemy domknąć tę małą stronę i otrzymać dobrą separację (C, D) razem z modelem drzewa T ukorzenionym w $V(C) \cap V(D)$.

Niech (C, D) będzie taką separacją rzędu k , że $V(C)$ jest domknięciem $V(A) \cup \{x\}$ i $\text{ord}(C, D) = k$. Jak już wspomnieliśmy wcześniej przerzucanie krawędzi między stronami separacji nie wpływa na to która strona jest mała, więc możemy założyć, że $A \cup \{xy\} \subseteq C$. Zbiór $V(A)$ jest domknięty, więc z twierdzenia Menger’a istnieją rozłączne ścieżki $(P_s)_{s \in V(T)}$ w $B \cap C$ takie, że P_s jest (V_s) – $(V(C) \cap V(D))$ ścieżką. Wówczas $(V_s \cup V(P_s))_{s \in V(T)}$ jest modelem T ukorzenionym w (C, D) , więc (C, D) jest szukaną separacją. $\square$

Twierdzenie 7.11 (Erdős-Szekeres). *Każdy ciąg długości większej niż $(k - 1)^2$, którego elementy są uporządkowane liniowo, zawiera podciąg długości k który jest słabo rosnący lub słabo malejący.*

Wniosek 7.12. *Jeżeli $\text{tn}(G) > 2k^2$, to krata $2 \times k$ jest minorem grafu G .*

Dowód. Korzystamy z lematu 7.10 dla ścieżki P długości $2k^2$. Dostajemy separację (A, B) grafu G oraz odpowiedni model P w A . Po skonstruowaniu worków z modelu i usunięciu zbędnych wierzchołków i krawędzi możemy założyć, że $V(P) = V(A) \subseteq V(B)$. Ścieżka P zawiera dwie rozłączne ścieżki P_1 i P_2 , każda długości k^2 . Zbiór $V(P)$ jest wysoce połączony, więc istnieje k^2 rozłącznych $V(P_1)$ – $V(P_2)$ ścieżek. Ścieżki te definiują pełne skojarzenie między wierzchołkami ścieżek P_1 i P_2 . Na mocy twierdzenia Erdősa-Szekeres’a znajdziemy k wierzchołków na ścieżce P_1 takich, że odpowiadające im wierzchołki na P_2 albo leżą w tej samej kolejności, albo w przeciwnej. W obu przypadkach otrzymujemy kratę $2 \times k$ jako minor grafu G . $\square$

8. TWIERDZENIE O KRACIE

Wiemy już, że grafy o dużej szerokości drzewiastej mają splątania dużego rzędu. Możemy więc przeformułować twierdzenie o kracie w następujący sposób.

Twierdzenie 8.1 (o kracie). *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego grafu G zachodzi*

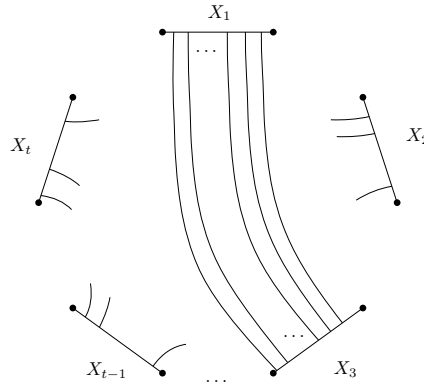
$$G \text{ ma splątanie rzędu większego niż } f(n) \Rightarrow \boxplus_n \prec G.$$

Niech $t = n^2$. Strategia dowodu twierdzenia o kracie jest następująca: spróbujemy skonstruować model K_t w grafie G . Jeżeli to się uda, to $\boxplus_n \prec K_t \prec G$. Jeżeli konstrukcja modelu kliki się nie powiedzie, to dostaniemy na pocieszenie model $\boxplus_n$ w G .

Oznaczmy przez $\kappa_G(X, Y)$ maksymalną liczbę rozłącznych X - Y ścieżek w grafie G .

Dowodzimy twierdzenie o kracie dla funkcji postaci $f(t, n) = t \cdot m$, gdzie dokładną wartość $m = m(t, n)$ podamy za chwilę. Jeżeli G ma splątanie $\mathcal{T}$ rzędu większego niż $t \cdot m$, to z lematu 7.10 (o modelu drzewa po małej stronie separacji w splątaniu) dostajemy separację $(A, B) \in \mathcal{T}$ grafu G taką, że $V(A)$ jest domknięty oraz model ścieżki długości $t \cdot m$ zawarty w A i ukorzeniony w $V(A) \cap V(B)$. Konstruujemy worki modelu ścieżki i wierzchołki otrzymanej ścieżki utożsamiamy z wierzchołkami $V(A) \cap V(B)$. Otrzymaną ścieżkę dzielimy na t rozłącznych ścieżek, każdą długości m . Niech $X_1, \dots, X_t$ będą zbiorami wierzchołków tych t ścieżek. Ponieważ $V(A) \cap V(B)$ jest wysoce spójny w B , wiemy, że każde dwa zbiory X_i i X_j można połączyć m rozłącznymi ścieżkami w B , to znaczy $\kappa_G(X_i, X_j) \geq m$ dla dowolnych $i, j \in \{1, \dots, t\}$.

Chcielibyśmy wybrać po jednej ścieżce dla każdej dwójki $\{X_i, X_j\}$ tak aby wszystkie wybrane ścieżki były rozłączne. Tak otrzymalibyśmy model K_t w G (patrz Rysunek 9). Jednak rodziny ścieżek dla różnych par (X_i, X_j) mogą się bardzo przecinać. Następujący lemat nam rozplącze te ścieżki albo wskaże model $\boxplus_n$ w G .

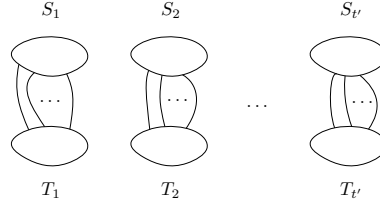


RYSUNEK 9. Jeśli dla każdej dwójki $\{X_i, X_j\}$ znajdziemy ścieżkę i te ścieżki będą parami rozłączne to otrzymamy model K_t w G .

Lemat A. Dla dowolnych $t', n > 0$ istnieje taka liczba $m' = m'(t', n)$, że dla dowolnych zbiorów $S_1, \dots, S_{t'}, T_1, \dots, T_{t'} \subseteq V(G)$ takich, że $\kappa_G(S_i, T_i) \geq m'$ dla każdego $i \in \{1, \dots, t'\}$ zachodzi

- (i) istnieją rozłączne ścieżki $P_1, \dots, P_{t'}$ takie, że P_i jest S_i - T_i ścieżką, lub
- (ii) $\boxplus \prec G$.

Korzystając z lematu A dla $t' = \binom{t}{2}$, gdzie pary (S_i, T_i) to wszystkie możliwe pary postaci (X_k, X_ℓ) dla $1 \leq k < \ell \leq t$, dostajemy model kliki K_t lub model kraty $n \times n$,



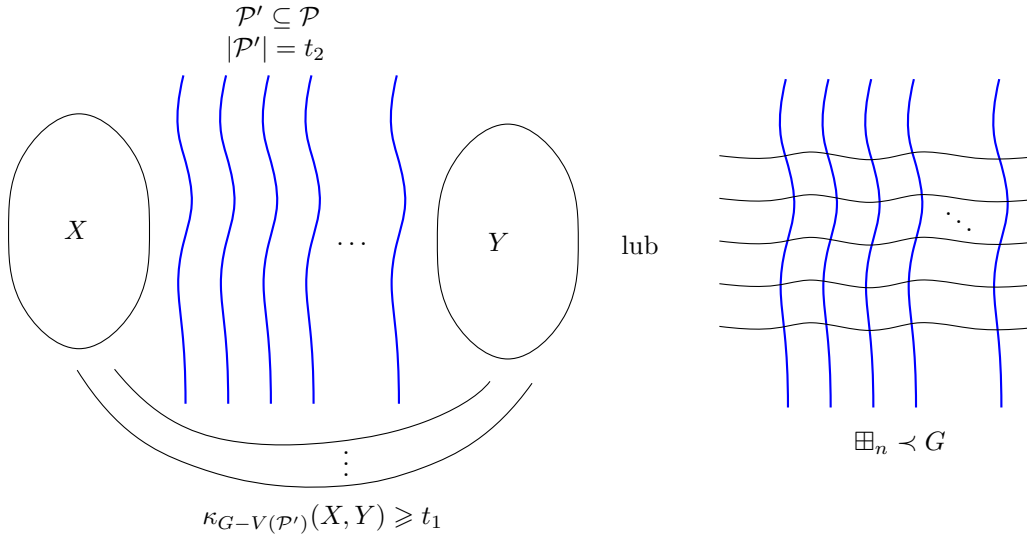
RYSUNEK 10. Jeśli jest duża spójność pomiędzy każdą parą S_i i T_i to możemy znaleźć rozłączną kolekcję ścieżek łączących każdą parę lub minor kraty. Zauważ, że zbiory S_i i T_j nie muszą być rozłączne.

więc twierdzenie o kracie zachodzi, gdy $m(t, n) = m' \left(\binom{t}{2}, n \right)$, gdzie m' jest funkcją z lematu A.

Pozostaje więc wykazać lemat A.

Lemat B (Diestel, Gorbunov, Jensen, Thomassen). Dla dowolnych $n, t_1, t_2 > 0$ istnieją $k_1 = k_1(n, t_1, t_2)$ oraz $k_2 = k_2(n, t_1, t_2)$ takie, że jeśli $\mathcal{P}$ jest rodziną k_2 rozłącznych ścieżek w G , a $X, Y \subseteq V(G)$ są takimi zbiorami, że $\kappa_G(X, Y) \geq k_1$, to

- (i) istnieje $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ taki, że $|\mathcal{P}'| = t_2$ oraz $\kappa_{G-V(\mathcal{P}')} (X, Y) \geq t_1$, lub
- (ii) $\boxplus_n \prec G$.



RYSUNEK 11. Teza lematu B.

Wykażemy teraz, że lemat A wynika z lematu B.

Dowód lematu A. Ustalmy $n > 0$. Dla uproszczenia zapisu niech

$$k(x) = \max(k_1(n, x, x), k_2(n, x, x), x),$$

gdzie funkcje $k_1(n, t_1, t_2)$ i $k_2(n, t_1, t_2)$ są jak w Lemacie B. Niech $K(0) = 1$ i $K(i+1) = k(K(i))$ dla $i \geq 0$. Wykażemy indukcyjnie, że teza lematu zachodzi dla $m'(t', n) = K \left(\binom{t'}{2} \right)$.

Dla $t' = 1$ mamy $m'(t', n) = K(0) = 1$, więc teza jest spełniona. Pokażemy teraz, że jeśli teza zachodzi dla $t' - 1$, to zachodzi też dla t' . Załóżmy, że $\boxplus_n \not\prec G$. Niech $\mathcal{P}_0$ będzie rodziną $K\left(\binom{t'}{2}\right)$ rozłącznych $S_{t'}-T_{t'}$ ścieżek. Będziemy $(t' - 1)$ -krotnie stosować lemat B i otrzymamy zstępujący ciąg rodzin $\mathcal{P}_0 \supseteq \mathcal{P}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{P}_{t'-1}$. Przyjmijmy, że mamy już rodzinę $\mathcal{P}_{i-1}$ taką, że

$$|\mathcal{P}_{i-1}| \geq K\left(\binom{t'}{2} - i + 1\right) \geq k_2\left(n, K\left(\binom{t'}{2} - i\right), K\left(\binom{t'}{2} - i\right)\right)$$

Rodzinę $\mathcal{P}_i$, dla $1 \leq i \leq t' - 1$, otrzymujemy aplikując lemat B do $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{i-1}$, $X = S_i$, $Y = T_i$. Mamy

$$\kappa_G(S_i, T_i) \geq K\left(\binom{t'}{2}\right) \geq K\left(\binom{t'}{2} - i + 1\right) \geq k_1\left(n, K\left(\binom{t'}{2} - i\right), K\left(\binom{t'}{2} - i\right)\right).$$

W efekcie otrzymujemy $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}_{i-1}$, gdzie $|\mathcal{P}_i| \geq K\left(\binom{t'}{2} - i\right)$ oraz $\kappa_{G-V(\mathcal{P}_i)}(S_i, T_i) \geq K\left(\binom{t'}{2} - i\right) \geq K\left(\binom{t'-1}{2}\right)$.

Zauważmy, że $|\mathcal{P}_{t'-1}| \geq K\left(\binom{t'}{2} - t' + 1\right) \geq 1$. Ustalmy więc dowolne $P \in \mathcal{P}_{t'-1}$. Z powyższych własności wynika, że po usunięciu $S_{t'}-T_{t'}$ ścieżki P z grafu G , wszystkie pozostałe $t' - 1$ pary zbiorów mają wystarczającą spójność aby użyć założenia indukcyjnego. Dokładniej, dla każdego $i \in \{1, \dots, t' - 1\}$ mamy $\kappa_{G-V(P)}(S_i, T_i) \geq \kappa_{G-V(\mathcal{P}_i)}(S_i, T_i) \geq K\left(\binom{t'-1}{2}\right)$. Możemy więc z założenia indukcyjnego znaleźć rozłączne ścieżki łączące pary zbiorów (S_i, T_i) dla $i \in \{1, \dots, t' - 1\}$. Dokładając $S_{t'}-T_{t'}$ ścieżkę P otrzymujemy t' szukanych ścieżek, co kończy dowód. $\square$

Pozostaje więc wykazać lemat B. Zaczniemy jednak od dowodu kolejnego lematu. To jest ten o estetycznym dowodzie.

Lemat C. Dla dowolnych $s, n > 0$ istnieją liczby k i m takie, że jeśli $P_1, \dots, P_k$ są rozłącznymi ścieżkami w G takimi, że $P_i = (v_{i1}, \dots, v_{im})$ oraz graf $G[\{v_{1j}, \dots, v_{kj}\}]$ jest spójny dla $j \in \{1, \dots, m\}$, to

$$K_s \prec G \quad \text{lub} \quad \boxplus_n \prec G.$$

Dowód lematu C. Niech $k = (s - 1)^{n-1}$ oraz $m = \max(s, n) \cdot 2^{\binom{k}{2}}$. Istnieje tylko $2^{\binom{k}{2}}$ etykietowanych grafów na k -elementowym zbiorze wierzchołków, więc istnieje zbiór $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ taki, że $|I| = \max(s, n)$ oraz grafy $G_j := G[\{v_{1j}, \dots, v_{kj}\}]$ dla $j \in I$ są „takie same”, to znaczy odpowiadające wierzchołki są połączone tak samo. Niech H będzie izomorficzny do wszystkich grafów i ma wierzchołki poetykietowane indeksami ścieżek to jest $V(H) = \{1, \dots, k\}$.

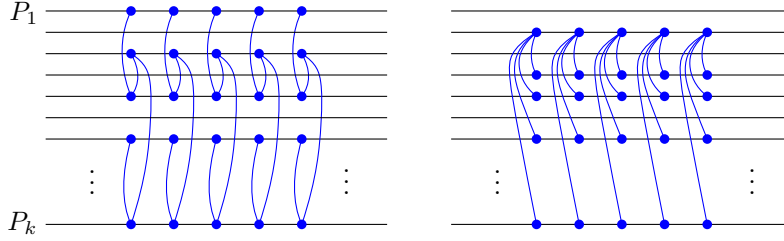
Graf H ma $k = s^{n+1} + 1$ wierzchołków i jest spójny, a więc musi zawierać ścieżkę długości n lub wierzchołek o stopniu s . Rzeczywiście, w przeciwnym wypadku

$$|V(H)| \leq 1 + (s - 1) + \dots + (s - 1)^{n-2} = \frac{(s - 1)^{n-1} - 1}{(s - 1) - 1} < k,$$

sprzeczność.

Jeśli H zawiera ścieżkę na n wierzchołkach to ta ścieżka w $|I| = \max(s, n) \geq n$ kopiach w $\{G_i\}_{i \in I}$ wraz z odpowiadającymi n ścieżkami spośród $P_1, \dots, P_k$ daje model kraty $\boxplus_n$ w G (patrz Rysunek 12).

Jeśli H ma wierzchołek stopnia co najmniej s , to ten wierzchołek w $|I| = \max(s, n) \geq s$ kopiach w $\{G_i\}_{i \in I}$ wraz z s ścieżkami spośród $P_1, \dots, P_k$ odpowiadającymi sąsiadom tego wierzchołka daje model $K_{s,s}$ w G . Konstruktując doskonałe skojarzenie w modelu $K_{s,s}$ otrzymujemy $K_s \prec K_{s,s} \prec G$ (patrz Rysunek 12).



RYSUNEK 12. Jeśli H zawiera ścieżkę na n wierzchołkach to $\boxplus_n \prec G$.
Jeśli H ma wierzchołek stopnia s to $K_{s,s} \prec G$.

□

Zanim przejdziemy do dowodu lematu B wprowadzimy jeszcze jedno użyteczne pojęcie.

Ciąg $(H_1, \dots, H_t)$ podgrafów grafu G jest k -dysekcją grafu G , jeżeli dla każdego $i \in \{1, \dots, t-1\}$ para $(H_1 \cup \dots \cup H_i, H_{i+1} \cup \dots \cup H_t)$ jest k -separacją G .

Ćwiczenie (7.4). Niech $P_1, \dots, P_k$ będą rozłącznymi X - Y ścieżkami w grafie G i niech $P_1 = (v_0, \dots, v_t)$. Wykazać, że jeżeli dla każdego $i \in \{1, \dots, t-1\}$ zachodzi $\kappa_{G-\{v_i\}}(X, Y) < k$, to istnieje k -dysekcja $(H_1, \dots, H_t)$ taka, że

- (i) $X \subseteq V(H_1)$, $Y \subseteq V(H_t)$ oraz
- (ii) $v_i \in V(H_i) \cap V(H_{i+1})$ dla $i \in \{1, \dots, t-1\}$.

Dowód lematu B. Niech $k = k(n^2, n)$, $m = m(n^2, n)$ będą jak w Lemacie C. Niech

$$\begin{aligned} m_1 &= \max((2k+1)m, t_2), \\ k_1 &= k + t_1 - 1, \\ k_2 &= 2^{k_1} m_1. \end{aligned}$$

Możemy założyć, że

- (1) $K_{G/e}(X, Y) < k_1$ dla $e \in E(\mathcal{P})$,
- (2) $K_{G-e}(X, Y) < k_1$ dla $e \notin E(\mathcal{P})$.

Niech $\mathcal{Q}$ będzie rodziną k_1 rozłącznych X - Y ścieżek. W szczególności mamy

- (3) $E(G) = E(\mathcal{P}) \cup E(\mathcal{Q})$,
- (4) $E(\mathcal{Q}) \cap E(\mathcal{Q}) = \emptyset$,
- (5) $V(\mathcal{Q}) = V(G)$.

Każda ścieżka z $\mathcal{P}$ przecina pewien podzbiór ścieżek w $\mathcal{Q}$. Ale takich podzbiorów jest 2^{k_1} . Istnieje więc zbiór ścieżek $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, które przecinają dokładnie ten sam podzbiór $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$. Jeśli $|\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'| \geq t_1$, to mamy $\kappa_{G-V(\mathcal{P}')} \geq |\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'| \geq t_1$, więc $\mathcal{P}'$ spełnia warunki lematu. Pozostaje więc wykazać, że jeśli $|\mathcal{Q} - \mathcal{Q}'| < t_1$, czyli $|\mathcal{Q}'| \geq k$, to $\boxplus_n \prec G$.

Niech $Q \in \mathcal{Q}'$ będzie dowolną ustaloną ścieżką. Możemy oprzeć o nią k_1 -dysekcję $(H_1, \dots, H_l)$ grafu G . Klastrując grupy sąsiadujących podgrafów otrzymujemy nową k_1 -dysekcję $(G_1, \dots, G_m)$ taką, że $G_i \cap Q$ przecina co najmniej $2k_1 + 1$ ścieżek z $\mathcal{P}'$. Wynika stąd, że dla każdego i rodzina $\mathcal{P}'$ zawiera ścieżkę zawartą w G_i oraz rozłączną z G_{i-1} i G_{i+1} . Konstruktując wszystkie zbiory postaci $V(Q') \cap (V(G_i) - V(G_{i+1}))$ dla $Q' \in \mathcal{Q}'$ dostajemy graf, w którym spełnione są warunki lematu C, więc $\boxplus_n \prec G$.

□

9. DRZEWO SPLĄTAŃ

Ustalmy graf G . Zbiór wszystkich splątań w G jest (częściowo) uporządkowany inkluzją. Splątania $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ są *rozdzielalne*, jeżeli są nieporównywalne w posecie splątań lub równoważnie jeżeli istnieje separacja $\{A, B\}$ grafu G taka, że $(A, B) \in \mathcal{T}$ i $(B, A) \in \mathcal{T}'$. Każda taka (niezorientowana) separacja $\{A, B\}$ *rozdziela* splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$. Jeżeli separacja $\{A, B\}$ jest separacją rozróżniającą $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ o najmniejszym możliwym rzędzie, to mówimy, że $\{A, B\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ *efektywnie*. *Splątaniem maksymalnym* w G nazywamy każdy maksymalny element posetu wszystkich splątań. Skoro elementy maksymalne posetu tworzą antyłańcuch, to każde dwa różne splątania maksymalne są rozdzielalne.

W posecie splątań stożek dolny każdego splątania jest łańcuchem. Aby się o tym przekonać, niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem rzędu k w grafie G . Wówczas dla każdego ℓ spełniającego $1 \leq \ell \leq k$ splątanie rzędu ℓ zawarte w $\mathcal{T}$ musi orientować $(\ell - 1)$ -separację zgodnie z $\mathcal{T}$, więc jest wyznaczone jednoznacznie. Poset splątań jest więc lasem (którego nie należy mylić z drzewem splątań!), w którym rząd separacji efektywnie rozróżniającej dwa splątania rozdzielalne $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ jest równy rzędowi splątania będącego najniższym wspólnym przodkiem tych splątań, lub 0, jeżeli splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ są w różnych składowych (patrz Rysunek 13).

Ze względów technicznych w tej części materiału wygodniej będzie nam pracować z separacjami krawędziowymi niż ze standardowymi separacjami. *Separacją krawędziową* grafu G nazywamy podział zbioru krawędzi $E(G)$ na parę rozłącznych zbiorów $\{E_1, E_2\}$. *Rzędem* separacji krawędziowej $\{E_1, E_2\}$ nazywamy liczbę wierzchołków będących końcami krawędzi po obu stronach separacji i oznaczamy go przez $\text{ord}(E_1, E_2)$.

Jeżeli $\{A, B\}$ jest separacją, to $\{E(A), E(B)\}$ jest separacją krawędziową o rzędzie nie większym niż $\text{ord}(A, B)$.

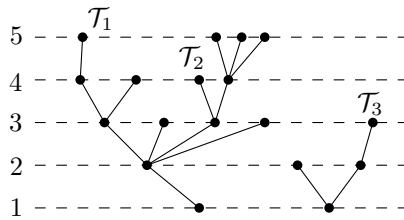
Będziemy potrzebować naturalnego przejścia z separacji krawędziowej do zwykłej separacji. Aby to przejście działało, będziemy przyjmować niewinne założenie o grafie G , na którym pracujemy, że nie ma wierzchołków izolowanych. Każda separacja krawędziowa $\{E_1, E_2\}$ grafu G indukuje zwykłą separację $\{G[E_1], G[E_2]\}$. Dzięki temu, że G nie ma wierzchołków izolowanych, każdy wierzchołek G znajduje się po co najmniej jednej stronie. Dodatkowo łatwo widać, że $\text{ord}(E_1, E_2) = \text{ord}(G[E_1], G[E_2])$. Od tej chwili będziemy operować skrótem myślowym i kiedykolwiek będziemy mieli separację krawędziową $\{E_1, E_2\}$ i splątanie $\mathcal{T}$, będziemy pisać $(E_1, E_2) \in \mathcal{T}$, jeśli $(G[E_1], G[E_2]) \in \mathcal{T}$. Podobnie $\{E_1, E_2\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, jeśli $\{G[E_1], G[E_2]\}$ rozróżnia $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$.

Dwie separacje krawędziowe $\{E_1, E_2\}$ i $\{F_1, F_2\}$ są *zagnieżdżone*, jeżeli $E_i \subseteq F_j$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$. Wtedy $F_{3-j} \subseteq E_{3-j}$, więc definicja jest symetryczna.

Twierdzenie 9.1 (o zagnieżdżonym zbiorze separacji). *Dla każdego grafu G bez wierzchołków izolowanych istnieje zbiór $\mathcal{S}$ parami zagnieżdżonych separacji krawędziowych G taki, że dla dowolnych dwu rozróżnialnych splątań $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ w G istnieje separacja w $\mathcal{S}$ efektywnie rozróżniająca $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$.*

Lemat 9.2 (o rybce). *Niech G będzie grafem, a $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$ dwiema niezagnieżdżonymi separacjami krawędziowymi G . Wówczas każda separacja krawędziowa $\{C_1, C_2\}$ grafu G , która jest zagnieżdżona z obiema separacjami $\{A_1, A_2\}$ i $\{B_1, B_2\}$, jest też zagnieżdżona z czterema separacjami narożnymi $\{A_1 \cap B_1, A_2 \cup B_2\}$, $\{A_1 \cap B_2, A_2 \cup B_1\}$, $\{A_2 \cap B_1, A_1 \cup B_2\}$ i $\{A_2 \cap B_2, A_1 \cup B_1\}$.*

Dowód. Z definicji zagnieżdżenia mamy $C_{i_1} \subseteq A_{j_1}$ oraz $C_{i_2} \subseteq B_{j_2}$ dla pewnych $i_1, i_2, j_1, j_2 \in \{1, 2\}$. Gdyby zachodziło $i_1 \neq i_2$, to mielibyśmy $A_{3-j_1} \subseteq C_{3-i_1} = C_{i_2} \subseteq B_{j_2}$, więc separacje $\{A_1, A_2\}$ i $\{B_1, B_2\}$ byłyby zagnieżdżone. Możemy więc założyć $i_1 = i_2 = 1$ oraz $j_1 = j_2 = 1$ (być może zamieniając strony niektórych separacji). Mamy więc $C_1 \subseteq A_1$ oraz $C_1 \subseteq B_1$, więc $C_1 \subseteq A_1 \cap B_1$, $C_1 \subseteq A_2 \cup B_1$, $C_1 \subseteq A_1 \cup B_1$ i $C_1 \subseteq A_1 \cup B_2$, czyli separacja $\{C_1, C_2\}$ jest zagnieżdżona z separacjami narożnymi. $\square$



RYSUNEK 13. Poset splątań. Splątania $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ oraz $\mathcal{T}_3$ są maksymalne. Splątania $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ są efektywnie rozróżnialne separacją rzędu 2, zaś splątania $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_3$ są efektywnie rozróżnialne separacją rzędu 0.

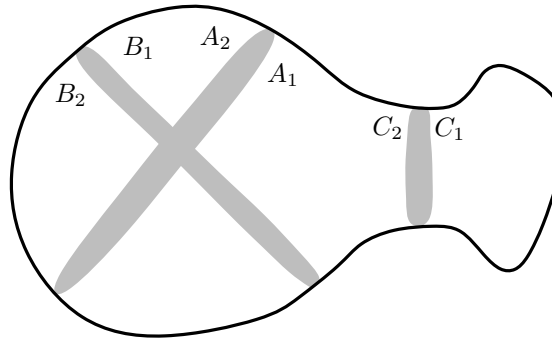
Dowód twierdzenia 9.1 o zagnieżdżonym zbiorze separacji. Niech $\mathcal{S}$ będzie dowolnym maksymalnym zbiorem parami zagnieżdżonych separacji, o tej własności, że każda separacja w $\mathcal{S}$ efektywnie rozróżnia pewne dwa splątania w G . Niech $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ będą rozróżnialnymi splątaniami. Wykażemy, że pewna separacja z $\mathcal{S}$ efektywnie rozróżnia te splątania.

Niech $\{A, B\}$ będzie taką separacją efektywnie rozróżniającą splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, która jest zagnieżdżona z największą liczbą separacji w $\mathcal{S}$. Zakładamy $(A, B) \in \mathcal{T}$ oraz $(B, A) \in \mathcal{T}'$. Gdyby $\{A, B\}$ była zagnieżdżona ze wszystkimi separacjami w $\mathcal{S}$, to z maksymalności zbioru $\mathcal{S}$ mielibyśmy $\{A, B\} \in \mathcal{S}$, czyli to co chcieliśmy pokazać. Załóżmy więc, że $\{A, B\}$ nie jest zagnieżdżona z pewną separacją $\{C, D\} \in \mathcal{S}$. Separacja $\{C, D\}$ efektywnie rozróżnia pewne dwa splątania $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$, gdzie $(C, D) \in \mathcal{U}$ oraz $(D, C) \in \mathcal{U}'$. Niech $k = \text{ord}(A, B)$ i $\ell = \text{ord}(C, D)$. Z submodularności mamy, że $\text{ord}(A \cap C, B \cup D) + \text{ord}(A \cup C, B \cap D) = \text{ord}(A, B) + \text{ord}(C, D) = k + \ell$.

Przypadek 1: $\ell \leq k$. Gdyby separacja $\{C, D\}$ rozróżniała splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, to robiłaby to efektywnie. To jednak przeczyłoby wyborowi $\{A, B\}$ jako separacji zagnieżdżonej z największą liczbą separacji z $\mathcal{S}$, bo $\{C, D\}$ jest zagnieżdżona ze wszystkimi separacjami w $\mathcal{S}$. Zatem splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ nie są rozróżniane przez separację $\{C, D\}$. Zakładamy więc bez straty ogólności, że $(C, D) \in \mathcal{T}$ i $(D, C) \in \mathcal{T}'$.

Założmy, że $\text{ord}(A \cap C, B \cup D) \geq \ell$. Wówczas mamy $\text{ord}(A \cup C, B \cap D) \leq k$. Skoro strony A i C są małe w $\mathcal{T}$ i $A \cup C \cup (B \cap D) = E(G)$, więc $(A \cup C, B \cap D) \in \mathcal{T}$ (bo trzy małe strony w $\mathcal{T}$ nie mogą się sumować do całego G). Ponadto $B \cap D \subseteq B$, a B jest małą stroną w $\mathcal{T}'$, więc $(B \cap D, A \cup C) \in \mathcal{T}'$. Wobec tego $\{A \cup C, B \cap D\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$. Ponieważ $\text{ord}(A \cup C, B \cap D) \leq k$, ta separacja rozróżnia $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ efektywnie. Ale na mocy lematu 9.2 (przyjmując $\{A_1, A_2\} = \{A, B\}$ i $\{B_1, B_2\} = \{C, D\}$) separacja $\{A \cup C, B \cap D\}$ jest zagnieżdżona ze wszystkimi separacjami z $\mathcal{S}$, z którymi jest zagnieżdżona separacja $\{A, B\}$, a dodatkowo jest zagnieżdżona z separacją $\{C, D\} \in \mathcal{S}$, co przeczy wyborowi separacji $\{A, B\}$.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że $\text{ord}(A \cap C, B \cup D) < \ell$, a zastępując w powyższym rozumowaniu A i B oraz $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$ dostajemy, że również $\text{ord}(B \cap C, A \cup D) < \ell$. Zatem separacje $\{A \cap C, B \cup D\}$ i $\{B \cap C, A \cup D\}$ nie rozróżniają splątania $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$. Skoro jednak C jest małą stroną w $\mathcal{U}$, to $(A \cap C, B \cup D), (B \cap C, A \cup D) \in \mathcal{U}$, a zatem



RYSUNEK 14. Separacje krawędziowe w Lemacie o rybie.

również w $\mathcal{U}'$. To jednak oznacza, że graf G jest sumą trzech małych stron splątania $\mathcal{U}'$, mianowicie $(A \cap C) \cup (B \cap C) \cup D = E(G)$ – sprzeczność.

Przypadek 2: $\ell > k$. Wtedy separacja $\{A, B\}$ ma zbyt mały rząd, żeby rozróżniać splątania $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$. Zakładamy więc bez straty ogólności, że $(A, B) \in \mathcal{U}$ oraz $(A, B) \in \mathcal{U}'$.

Założmy, że $\text{ord}(A \cap C, B \cup D) > k$. Wówczas $\text{ord}(A \cup C, B \cap D) < \ell$. Ponieważ A i C są małymi stronami w $\mathcal{U}$ i $A \cup C \cup (B \cap D) = E(G)$, więc $(A \cup C, B \cap D) \in \mathcal{U}$. Ponadto D jest małą stroną w $\mathcal{U}'$, więc $(B \cap D, A \cup C) \in \mathcal{U}'$, więc separacja $\{B \cap D, A \cup C\}$ rzędu mniejszego niż l rozróżnia splątania $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ – sprzeczność.

Możemy więc założyć, że $\text{ord}(A \cap C, B \cup D) \leq k$, a dzięki symetrycznemu rozumowaniu również $\text{ord}(A \cap D, B \cup C) \leq k$. Podobnie jak w poprzednim przypadku separacje $\{A \cap C, B \cup D\}$ i $\{A \cap D, B \cup C\}$ są zagnieżdżone z większą liczbą separacji z $\mathcal{S}$ niż separacja $\{A, B\}$. Nie rozróżniają więc one separacji $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$. Ale A jest małe w $\mathcal{T}$, więc również $A \cap D$ i $A \cap C$ są małe w $\mathcal{T}$, więc separacje $(A \cap C, B \cup D)$ i $(A \cap D, B \cup C)$ są w $\mathcal{T}$ (i również $\mathcal{T}'$). To jednak oznacza, że trzy małe strony splątania $\mathcal{T}'$ sumują się do całego grafu: $(A \cap C) \cup (A \cap D) \cup B = E(G)$ – sprzeczność.

□

Niech G będzie grafem, a $(T, \mathcal{V})$ jego dekompozycją drzewiastą. Założmy ponadto, że dla każdej krawędzi $e \in E(G)$ jest wyróżniony pewien *wierzchołek świadczący* $t(e) \in V(T)$, którego worek $V_{t(e)} \in \mathcal{V}$ zawiera oba końce krawędzi e . Niech $t't'' \in E(T)$. Wtedy definiujemy $E_{t't''}$ jako zbiór tych krawędzi $e \in E(G)$ takich, że t' leży na ścieżce z $t(e)$ do t'' w T . Wtedy każda krawędź $t't'' \in E(T)$ indukuje separację krawędziową $\{E_{t't''}, E_{t''t'}\}$ grafu G .

Twierdzenie 9.3 (o drzewie splątań). *Niech G będzie grafem bez wierzchołków izolowanych, a $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$ będą splątaniem maksymalnymi w G . Wówczas istnieje dekompozycja drzewiasta $(T, \mathcal{V})$ grafu G razem z wyróżnionymi węzłami świadczącymi oraz bijekcja $\tau : V(T) \rightarrow \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$, taka że:*

- (i) *dla każdego splątania $\mathcal{T}_i = \tau(t_i)$ i dla każdej krawędzi $s's''$ w T , jeśli $\text{ord}(E_{s's''}, E_{s''s'}) < \text{ord}(\mathcal{T}_i)$ i s' leży na ścieżce z t_i do s'' w T , to $(E_{s's''}, E_{s''s'}) \in \mathcal{T}_i$, oraz*
- (ii) *dla każdych dwu różnych splątań $\mathcal{T}_i = \tau(t_i)$, $\mathcal{T}_j = \tau(t_j)$ istnieje krawędź $s's''$ na ścieżce z t_i do t_j w T taka, że separacja $\{E_{s's''}, E_{s''s'}\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}_i$ i $\mathcal{T}_j$ efektywnie.*

Dowód. Niech $\mathcal{S}$ będzie zagnieżdżonym zbiorem separacji, takim że dla dowolnych dwu rozróżnialnych splątań $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ w G istnieje separacja w $\mathcal{S}$ efektywnie rozróżniająca $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}'$, i który zostanie bardziej precyzyjnie zdefiniowany w dalszej części dowodu. Oczywiście zbiór taki istnieje z twierdzenia 9.1, ale aby poniższe rozumowanie było skuteczne, będzie on musiał spełniać dodatkowe własności.

Póki co, dla ustalonego $\mathcal{S}$ niech $(T, \mathcal{V})$ będzie dekompozycją drzewiastą grafu G wraz z wyborem wierzchołków świadczących, taką że $\mathcal{S}$ jest zbiorem separacji indukowanych

przez krawędzie tej dekompozycji. Naszym celem jest ulokowanie splątania $\mathcal{T}_i$ w wierzchołkach drzewa T . Będziemy to robili algorytmicznie: będziemy *podświetlali* kolejne krawędzie drzewa T , rozważali las powstały przez usunięcie z T podświetlonych krawędzi i każde splątanie maksymalne będzie związane z jakąś składową lasu. Coraz większe rozdrobnienie drzewa T na składowe pociągnie za sobą coraz bardziej precyzyjne ulokowanie splątania w drzewie, a gdy każda składowa będzie zawierać jeden wierzchołek, otrzymamy tezę. Do dzieła!

Dla dowolnego $F \subseteq E(T)$, niech $\mathcal{K}(T - F)$ oznacza zbiór składowych lasu $T - F$. Dla $i = 0, \dots, n - 1$ (gdzie kolejne wartości i odpowiadają kolejnym krokom algorytmu), zdefiniowany zostanie zbiór podświetlonych krawędzi $F_i \subseteq E(T)$ i funkcja $f_i : \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\} \rightarrow \mathcal{K}(T - F_i)$. Utrzymywany będzie niezmiennik – dla każdego i spełnione będą następujące warunki:

- (i) $|F_i| = i$,
- (ii) $|f_i^{-1}(K)| \geq 1$ dla każdej składowej $K \in \mathcal{C}(F_i)$,
- (iii) $\max_{s's'' \in F_i} \text{ord}(E_{s's''}, E_{s''s'}) \leq \min\{m \mid \text{istnieje } \mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k \text{ takie, że } f_i(\mathcal{T}_j) \neq f_i(\mathcal{T}_k) \text{ oraz } \mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k \text{ rozróżnia separacja rzędu } m\}$,
- (iv) dla każdego $\mathcal{T}_j$ i dla każdej krawędzi $s's''$ w F_i , jeśli $\text{ord}(E_{s's''}, E_{s''s'}) < \text{ord}(\mathcal{T}_j)$ oraz s' leży na ścieżce ze składowej $\mathcal{C}(\mathcal{T}_j)$ do s'' w T , to $(E_{s's''}, E_{s''s'}) \in \mathcal{T}_j$ (czyli $f_i(\mathcal{T}_j)$ jest po dużej stronie; mówimy wtedy, że $\mathcal{T}_j$ *orientuje* krawędź $s's''$ w stronę składowej $\mathcal{C}(\mathcal{T}_j)$),
- (v) dla każdych dwu splątania maksymalnych $\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k$ przydzielonych przez funkcję f_i do różnych składowych istnieje krawędź $s's'' \in F_i$ na ścieżce łączącej w drzewie T te składowe, taka że separacja $\{E_{s's''}, E_{s''s'}\}$ rozróżnia splątania $\mathcal{T}_j$ i $\mathcal{T}_k$ efektywnie.

Niech $F_0 = \emptyset$ i niech $f_0(\mathcal{T}_j) = T$ dla każdego j . Niezmiennik jest oczywiście zachowany. Teraz ustalmy $i < n - 1$ i założmy, że niezmiennik jest spełniony. Ponieważ w $\mathcal{K}(F_i)$ jest mniej niż n składowych, do co najmniej jednej funkcja f_i przypisuje więcej niż jedno splątanie. Spośród wszystkich separacji należących do $\mathcal{S}$, które efektywnie rozróżniają pewne dwa splątania $\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k$ przypisane do tej samej składowej K wybierzmy separację o minimalnym rzędzie, i ponieważ jest ona indukowana przez krawędź drzewa T , oznaczmy ją przez $\{E_{s's''}, E_{s''s'}\}$, gdzie $s's'' \in E(T)$. Każde splątanie $\mathcal{T}_j \in f_i^{-1}(K)$ ma rząd większy niż $\text{ord}(E_{s's''}, E_{s''s'})$, gdyż wybraliśmy separację o minimalnym rzędzie, zatem separacja dzieli zbiór $f_i^{-1}(K)$ na sumę rozłącznych zbiorów A i B , gdzie A zawiera te splątania, w których jest $(E_{s's''}, E_{s''s'})$, a B te, w których jest $(E_{s''s'}, E_{s's''})$. Ponieważ separacja $\{E_{s's''}, E_{s''s'}\}$ rozróżnia pewne dwa elementy $f_i^{-1}(K)$, zbiory A i B są niepuste. Wykażemy teraz, że krawędź $s's''$ należy do składowej K . Dla dowodu nie wprost założmy, że istnieje krawędź $t't'' \in F_i$ oddzielająca $s's''$ od składowej K . Bez straty ogólności przyjmijmy, że istnieje ścieżka przechodząca (w tej kolejności) w T przez wierzchołki s', s'', t', t'' i składową K . Zatem $E_{s''s'} \supseteq E_{t''t'}$. Ponieważ $\text{ord}(E_{t't''}, E_{t''t'}) \leq \text{ord}(E_{s's''}, E_{s''s'}) < \text{ord}(\mathcal{T}_j)$ dla każdego $\mathcal{T}_j \in f_i^{-1}(K)$ otrzymujemy, że każde $\mathcal{T}_j \in f_i^{-1}(K)$ orientuje krawędź $t't''$, a z powodu wspomnianego zagnieżdżenia również krawędź $s's''$, w stronę składowej K . To stoi w sprzeczności z faktem, że $\{E_{s's''}, E_{s''s'}\}$ rozróżnia $\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k \in f_i^{-1}(K)$.

Niech $F_{i+1} = F_i \cup \{s's''\}$ i zdefiniujmy f_{i+1} zgodnie z f_i dla tych $\mathcal{T}_j$, dla których $f_i(\mathcal{T}_j) \neq K$, a dla pozostałych niech $f_{i+1}(\mathcal{T}_j)$ będzie tą spośród dwu składowych lasu $K - s's''$, w której stronę splątanie $\mathcal{T}_j$ orientuje krawędź $s's''$.

Mamy do pokazania niezmiennik dla $i + 1$. Punkt (ii) wynika z tego, że zbiory A i B są niepuste. Jedynym nietrywialnym faktem, który jest do udowodnienia w ramach punktu (iv), jest to, że te splątania $\mathcal{T}_j$, dla których $f_i(\mathcal{T}_j) = f_{i+1}(\mathcal{T}_j) = L \neq K$, orientują krawędź $s's''$ w stronę składowej L – lecz w każdej takiej sytuacji istnieje krawędź $t't'' \in F_i$ zagnieżdżona z $s's''$ i powtarzając rozumowanie użyte poprzednio, z zagnieżdżenia i tego, że $\mathcal{T}_j$ orientuje $t't''$ w stronę L , otrzymalibyśmy, że krawędź $s's''$ również jest orientowana w stronę L przez splątanie $\mathcal{T}_j$. Zaś punkt (v) należy udowodnić tylko dla takich splątania $\mathcal{T}_j, \mathcal{T}_k$, które w chwili i były w składowej K i zostały rozdzielone, lecz one są efektywnie rozróżniane przez separację $\{E_{s's''}, E_{s''s'}\}$.

Pod koniec wszystkie krawędzie są podświetlone i mamy bijekcję między składowymi a splątaniem. Zauważmy, że gdyby liczba wierzchołków drzewa T była równa liczbie splątania n , każda składowa zawierałaby jeden wierzchołek i niezmiennik dawałby tezę. Aby to osiągnąć, teraz właśnie sprecyzujemy definicję $\mathcal{S}$, którą pozostawiliśmy niedopowiedzianą na początku dowodu.

Dowód zostanie zakończony, jeżeli wskażemy zbiór $\mathcal{S}$ spełniający warunki z początku dowodu i mający mniej niż n elementów, gdyż wtedy $|V(T)| \leq n$, a ponieważ każde splątanie $\mathcal{T}_j$ występuje w innej składowej lasu $C(F_{n-1})$, to po prostu $|V(T)| = n$. Niech $\hat{\mathcal{S}}$ będzie zagnieżdżonym zbiorem separacji z twierdzenia 9.1. Dla $i = 0, \dots, n-1$ zdefiniujemy co najwyżej i -elementowy zbiór $\mathcal{S}_i \subseteq \hat{\mathcal{S}}$ i podział $\mathbb{T}_i(1), \mathbb{T}_i(2), \dots, \mathbb{T}_i(i+1)$ zbioru splątania maksymalnych na sumę $i+1$ niepustych parami rozłącznych zbiorów. Będziemy utrzymywać niezmiennik, że dla każdych dwu splątania przydzielonych do różnych zbiorów $\mathbb{T}_i(a), \mathbb{T}_i(b)$ istnieje w $\mathcal{S}_i$ separacja, która je efektywnie rozróżnia.

Niech $\mathcal{S}_0 = \emptyset$ i niech $\mathbb{T}_0(1) = \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$. Niezmiennik oczywiście zachodzi. Teraz ustalmy $i < n-1$ i załóżmy, że niezmiennik zachodzi dla i . Istnieje element podziału $\mathbb{T}_i$, który nie jest singletonem. Bez straty ogólności niech to będzie $\mathbb{T}_1$. Spośród wszystkich elementów $\hat{\mathcal{S}}$ efektywnie rozróżniających pewne dwa splątania z $\mathbb{T}_1$ wybierzmy separację o najmniejszym rzędzie i oznaczmy ją przez $\{A, B\}$. Zauważmy, że z racji minimalnego rzędu separacja ta występuje we wszystkich splątaniach z $\mathbb{T}_1$, zatem dzieli zbiór $\mathbb{T}_1$ na sumę dwu niepustych rozłącznych zbiorów $\mathbb{T}_{1,1} = \{\mathcal{T}_j \in \mathbb{T}_1 \mid (A, B) \in \mathcal{T}_j\}$ i $\mathbb{T}_{1,2} = \{\mathcal{T}_j \in \mathbb{T}_1 \mid (B, A) \in \mathcal{T}_j\}$. Ponownie z minimalności rzędu, separacja ta efektywnie rozróżnia każde dwa splątania $\mathcal{T}_j \in \mathbb{T}_{1,1}, \mathcal{T}_k \in \mathbb{T}_{1,2}$. Niech $\mathcal{S}_{i+1} = \mathcal{S} \cup \{\{A, B\}\}$ i niech $\mathbb{T}_{i+1}$ będzie podziałem uzyskanym z $\mathbb{T}_i$ poprzez rozdzielenie $\mathbb{T}_1$ na $\mathbb{T}_{1,1}$ i $\mathbb{T}_{1,2}$. Oczywiście niezmiennik dla $i + 1$ jest spełniony.

Niech $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{n-1}$. Z niezmiennika dla $i = n - 1$, zbiór ten spełnia warunki na $\mathcal{S}$ postawione na początku dowodu. Ponadto $|\mathcal{S}| < n$, co kończy dowód. $\square$

10. KONTROLOWANIE SKOKÓW NA KRACIE ROZPINAJĄCEJ

Drzewo splątań zadaje nam strukturę drzewa która z grubsza będzie odpowiadać drzewu postulowanemu w strukturalnym twierdzeniu. Teraz będziemy próbować zrozumieć strukturę grafu lokalną względem splątania.

Twierdzenie 10.1 (o kracie w wersji wzmocnionej). *Istnieje funkcja g taka, że dla każdego $k \geq 1$, dla każdego grafu G i splątania $\mathcal{T}$ rzędu $g(k)$ w G , istnieje model $\boxplus_k$ w G kontrolowany przez $\mathcal{T}$.*

Dowód. Na ćwiczeniach. □

Niech G będzie grafem i $\mathcal{T}$ będzie splątaniem rzędu $g(k)$ w G

Cel: opisać strukturę G lokalną względem splątania $\mathcal{T}$.

Niech H będzie modelem $\boxplus_k$ kontrolowanym przez $\mathcal{T}$. Dla potrzeb twierdzenia strukturalnego nasz cel możemy przeformułować w następujący sposób.

Cel: opisać strukturę G lokalną względem H .

Prostszy cel na początek: Opisać strukturę G lokalną względem H , przy założeniu, że H jest kratą rozpinającą w G (to znaczy $H \subseteq G$ oraz $V(H) = V(G)$).

Niech H będzie kratą $k \times n$. Wierzchołek leżący na przecięciu i -tego wiersza i j -tej kolumny oznaczamy przez $v_H(i, j)$. Brzegiem o szerokości d kraty H nazywamy zbiór

$$\delta_d(H) = \{v_H(i, j) \mid \min(i, j, k - i + 1, n - j + 1) \leq d\}.$$

Dla $1 \leq i \leq k - 1$ oraz $1 \leq j \leq n - 1$ cykl $(v_H(i, j), v_H(i, j + 1), v_H(i + 1, j + 1), v_H(i + 1, j))$ nazywamy (i, j) -kratką. Jeżeli graf G jest rozpinany przez kratę H , to mówimy, że (i, j) -kratka ma *krzyżyk* w G , jeśli $\{v_H(i, j), v_H(i + 1, j + 1)\} \in E(G)$ oraz $\{v_H(i + 1, j), v_H(i, j + 1)\} \in E(G)$.

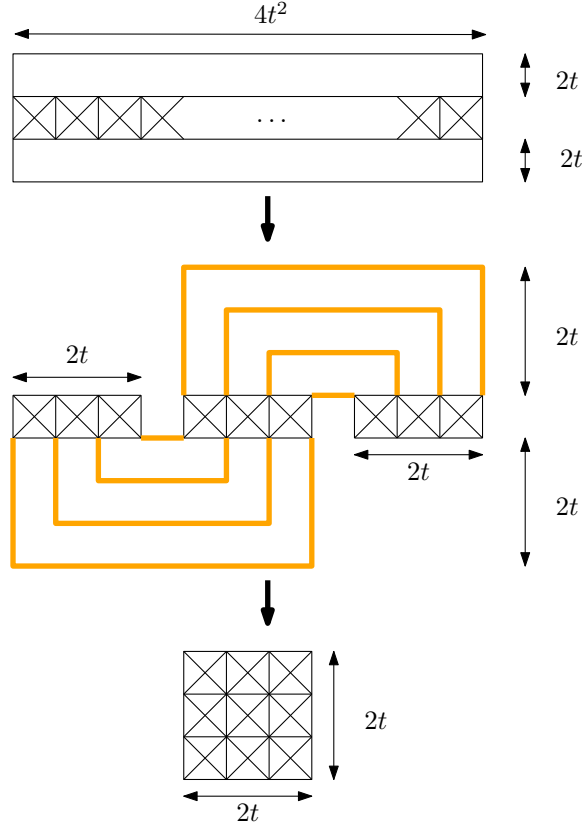
Lemat 10.2. *Niech G_0 będzie kratą $(4t) \times (4t^2)$ z krzyżykami w każdej kratce środkowego $((2t)$ -tego) wiersza. Wtedy*

$$K_t \prec G_0.$$

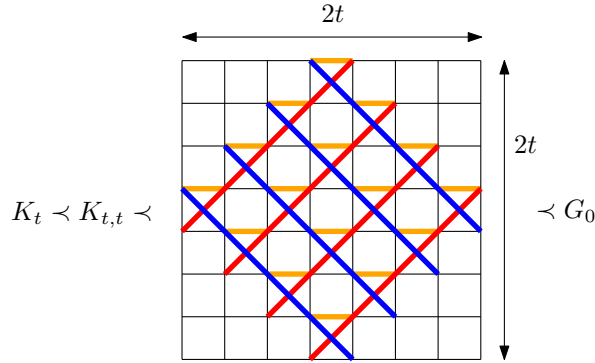
Dowód. Patrz Rysunki 15 i 16. □

Lemat 10.3 (Wiele krzyżyków daleko od brzegu). *Niech G będzie grafem rozpinanym przez kratę H . Niech t będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $d = 2t$. Jeżeli istnieje co najmniej $(2d^2 - 4)^2 + 1$ kratek rozłącznych z $\delta_{d-1}(H)$, które mają krzyżyk w G , to $K_t \prec G$.*

Dowód. Niech $\mathcal{C}$ będzie zbiorem $(2d^2 - 4)^2 + 1$ takich par (i, j) , że (i, j) -kratka kraty H jest rozłączna z $\delta_{d-1}(H)$ oraz ma krzyżyk w G . Niech $R = \{i \mid (i, j) \in \mathcal{C}\}$ oraz



RYSUNEK 15. Od kraty z krzyżykami w środkowym wierszu do kraty z krzyżykami w każdej kratce.

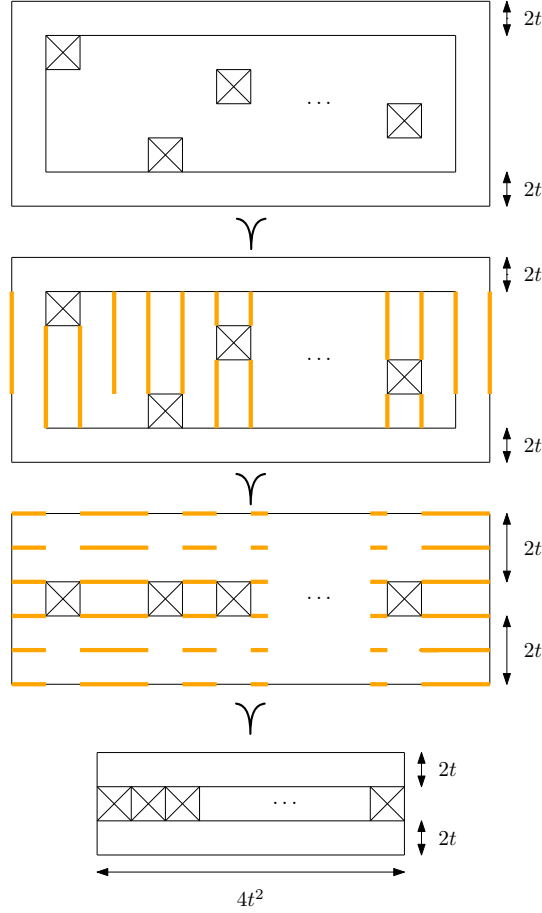


RYSUNEK 16. Od kraty z krzyżykami w każdej kratce do minoru pełnego grafu dwudzielnego.

$C = \{j \mid (i, j) \in \mathcal{C}\}$. Mamy

$$|R| \geq 2d^2 - 3 \text{ lub } |C| \geq 2d^2 - 3,$$

gdyż w przeciwnym wypadku mielibyśmy $|\mathcal{C}| \leq (2d^2 - 3)^2$, sprzeczność. Bez straty ogólności zakładamy, że $|C| \geq 2d^2 - 3$, to znaczy krzyżyki występują w co najmniej $2d^2 - 3$ różnych kolumnach kraty H . Biorąc po jednym krzyżyku z co drugiej kolumny zawierającej krzyżyk, otrzymujemy podzbiór $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ taki, że $|\mathcal{C}'| \geq d^2 - 1$ oraz dla dowolnych dwóch różnych par $(i, j), (i', j') \in \mathcal{C}'$ zachodzi $|j - j'| \geq 2$ (a więc krzyżyki w $\mathcal{C}'$ są w niesąsiadujących kolumnach).



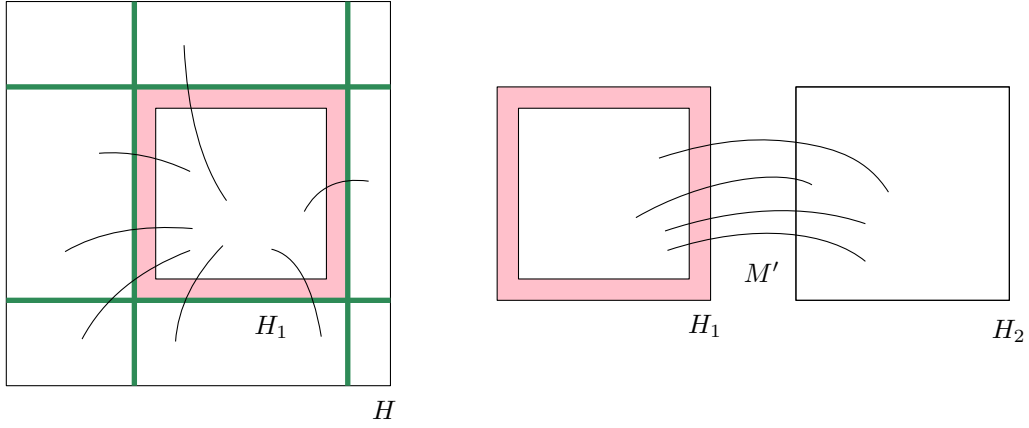
RYSUNEK 17. Jeżeli graf G ma krzyżyki w wielu kolumnach, to jego minorem jest graf G_0 z treści lematu 10.2.

Kontraktując niektóre „pionowe” krawędzie postaci $\{v_H(i, j), v_H(i + 1, j)\}$ możemy otrzymać taki minor grafu G rozpinany przez kratę $(2d) \times n$, że w d -tym wierszu jest $2d^2 - 1$ krzyżyków. Następnie kontraktując niektóre „poziome” krawędzie otrzymujemy graf G_0 z wypowiedzi lematu 10.2 (patrz Rysunek 17) $\square$

Lemat 10.4 (Liczne skojarzenie ze środka podkraty na zewnątrz). *Niech $d = 2t$ i $m = m_{10.4}(t) = 4(8t^2)^4$. Niech H_1 będzie podkratą H i niech M będzie skojarzeniem w G takim, że każda krawędź M ma jeden koniec w $V(H_1) - \delta_d(H_1)$, a drugi koniec w $V(G) - V(H_1)$. Wtedy, jeśli $|M| \geq m$, to $K_t \prec G$.*

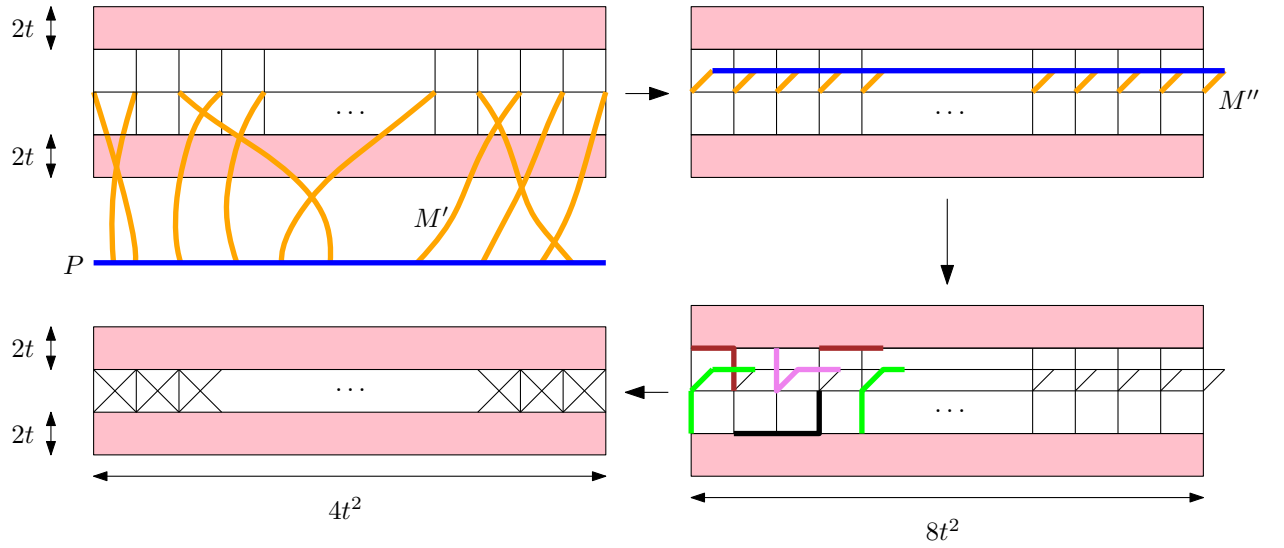
Dowód. Graf $H - V(H_1)$ można pokryć czterema kratami rozłącznymi z H_1 . Istnieje więc podskojarzenie $M' \subseteq M$ takie, że $|M'| \geq (8t^2)^4$, oraz wszystkie krawędzie M' mają koniec w pewnej kratce H_2 rozłącznej z H_1 . Patrz Rysunek 18.

Niech $R = \{i \mid M' \text{ ma krawędź o końcu w } i\text{-tym wierszu } H_1\}$ i $C = \{j \mid M' \text{ ma krawędź o końcu w } j\text{-tej kolumnie } H_1\}$. Wtedy $|R| \geq (8t^2)^2$ lub $|C| \geq (8t^2)^2$. Bez straty ogólności zakładamy, że zachodzi $|C| \geq (8t^2)^2$.



RYSUNEK 18. Pokrycie $H - H_1$ czterema kratami (po lewej) oraz skojarzenie z wnętrza H_1 do H_2 (po prawej).

Kontraktujemy wnętrze kraty H_1 zostawiając tylko jeden wiersz w środku (poza brzegiem $\delta_{2t}(H_1)$) oraz zostawiając tylko kolumny z C . Ze struktury kraty H_2 potrzebujemy jedynie dowolnie ustaloną ścieżkę Hamiltona P . Patrz Rysunek 19.



RYSUNEK 19. Od skojarzenia pomiędzy środkowym wierszem kraty a ścieżką na zewnątrz do grafu G_0 .

Niech P będzie ścieżką Hamiltona w H_2 . Z twierdzenia Erdősa-Szekeres'a istnieje podzbiór krawędzi $M'' \subseteq M'$ o mocy co najmniej $8t^2$, które mają koniec w kolumnach o rosnących numerach i których drugie końce leżą na ścieżce w sposób monotoniczny. Ponownie bierzemy minor naszej struktury, pozostawiając jedynie kolumny z krawędziami w M'' . Patrz Rysunek 19.

Następnie kontraktując odpowiednie krawędzie otrzymujemy ze środkowych dwu wierszy o długości $8t^2$, jeden wiersz o długości $4t^2$ z krzyżykiem w każdej kratce. A zatem $G_0 \prec G$ i z lematu 10.2 otrzymujemy $K_t \prec G_0 \prec G$. $\square$

Dla dowolnych dwóch wierzchołków x i y kraty H , takich, że $x = v_H(i, j)$ oraz $y = v_H(i', j')$ definiujemy $\text{h-dist}(x, y) = |j - j'|$.

Lemat 10.5 (Liczne skojarzenie o długich krawędziach z choć jednym końcem daleko od brzegu). *Niech $d = 4t$, $m_1 = 4t^2 + m_{10.4}(t)$, $m_2 = 4m_{10.4}(t)$, $m_{10.5}(t) = m_1 \times m_2$ i niech M będzie skojarzeniem w G takim, że dla każdej krawędzi $e = xy \in M$ mamy*

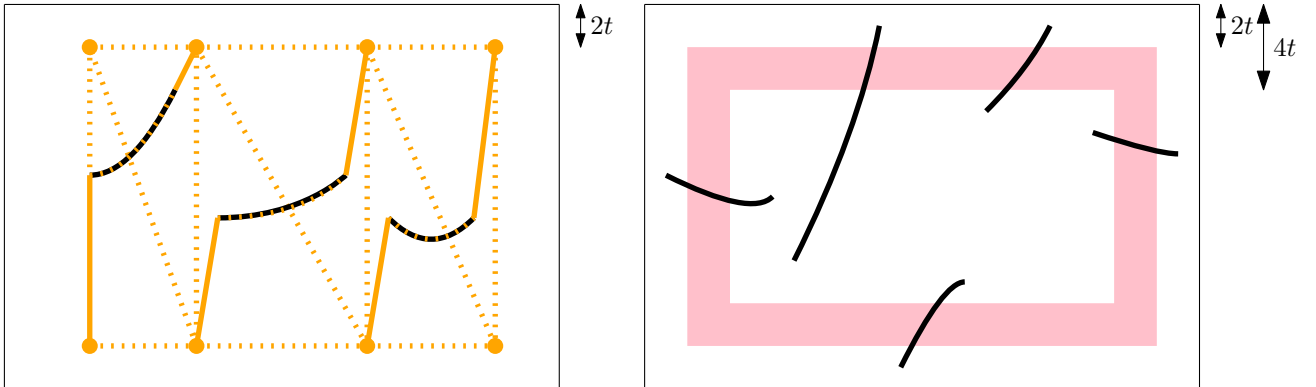
- (i) $\text{h-dist}(x, y) \geq 4t$ oraz
- (ii) $x \notin \delta_d(H)$ lub $y \notin \delta_d(H)$

Jeśli $|M| \geq m_{10.5} = m_1 \cdot m_2 + 1$, to $K_t \prec G$.

Dowód. Dla każdej krawędzi $e = xy \in M$ niech $I_e = \{j \mid \text{h-dist}(x, v_H(1, j)) + \text{h-dist}(v_H(1, j), y) = \text{h-dist}(x, y)\}$. Niech $\mathcal{I} = \{I_e\}_{e \in M}$. Kładąc $I_e < I_f$ jeśli $j < k$ dla wszystkich $j \in I_e, k \in I_f$ dostajemy porządek częściowy. Dla dowolnego porządku częściowego P mamy $|P| \leq \text{height}(P) \cdot \text{width}(P)$, więc $\mathcal{I}$ zawiera łańcuch o mocy m_1 lub antyłańcuch o mocy m_2

Przypadek 1: Istnieje $M' \subseteq M$ takie, że przedziały I_e oraz I_f są rozłączne dla różnych $e, f \in M'$ oraz $|M'| \geq m_1$.

Jeżeli co najmniej $4t^2$ spośród skoków w M' nie ma żadnego z końców w $\delta_{2t}(H)$, to z każdego takiego skoku możemy zrobić jeden krzyżyk, otrzymując w ten sposób jako minor graf G_0 z lematu 10.2, więc G ma K_t -minor (patrz Rysunek 20). W przeciwnym razie istnieje $m_{10.4}(t)$ skoków w M' , spośród których każdy ma jeden koniec w $\delta_{2t}(H)$, a więc drugi w $V(H) - \delta_{4t}(H)$ (patrz Rysunek 20). Wtedy jednak G ma K_t -minor na mocy lematu 10.4.



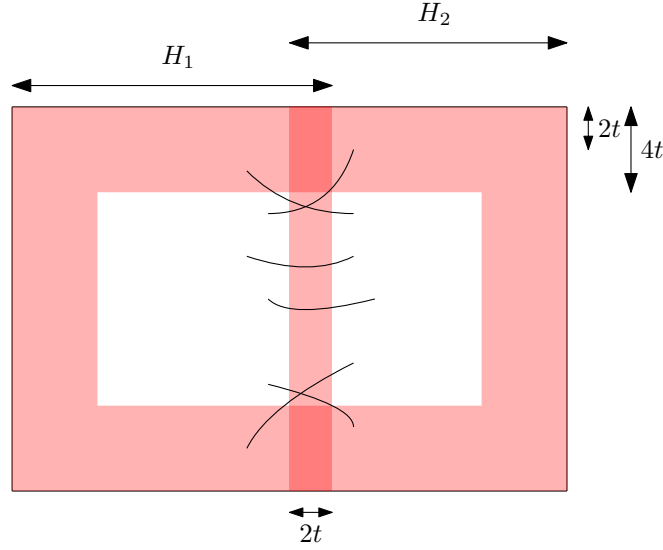
RYSUNEK 20. Dużo skoków zawartych w rozłącznych pasach kolumn pozwala wygenerować dużo krzyżyków daleko od brzegu lub daje duże skojarzenie ze środka podkraty na zewnątrz.

Przypadek 2: Istnieją $M' \subseteq M$ oraz j_0 takie, że j_0 należy do I_e dla wszystkich $e \in M'$ oraz $|M'| \geq m_2$.

Dla każdego skoku $e \in M'$ zachodzi $\text{h-dist}(x, y) \geq 4t$, więc $\{j_0 - 2t - 1, j_0\} \subseteq I_e$ lub $\{j_0 - 1, j_0 + 2t\} \subseteq I_e$. Istnieje więc podzbiór M'' o mocy co najmniej $m_2/2$ oraz pas

$(j, j + 2t)$ takie, że każdy skok w M'' „przeskakuje” kolumny z pasa $(j, j + 2t)$, to znaczy $\{j - 1, j + 2t + 1\} \subseteq I_e$.

Kratę H możemy w jednoznaczny sposób pokryć dwoma podkratami H_1 i H_2 , których przecięciem są kolumny z pasa $(j, j + 2t)$. Wówczas każda krawędź w M'' ma jeden z końców w $V(H) - \delta_d(H)$. Ale oba końce krawędzi leżą poza pasem $(j, j + 2t)$. Oznacza to, że każda krawędź ma koniec w $V(H_1) - \delta_{2t}(H_1)$ lub w $V(H_2) - \delta_{2t}(H_2)$. Skoro $|M''| \geq m_2/2 = 2m_{10.4}(t)$, to K_t -minor możemy otrzymujemy aplikując lemat 10.4 do jednej z krat H_1 lub H_2 (patrz Rysunek 21).



RYSUNEK 21. Dużo skoków przeskakujących tę samą kolumnę daje podkratę z dużym skojarzeniem między środkiem a zewnętrzem.

□

Lemat 10.6. Istnieją funkcje $\ell = \ell(t)$ oraz $n = n(t, k)$ takie, że dla dowolnych liczb całkowitych $t, k > 0$ oraz dowolnego grafu G bez K_t -minoru, jeżeli graf $H \cong \boxplus_n$ rozpiną G , to istnieją podkrata $\boxplus_k \cong H_1 \subseteq H$ oraz zbiór $U \subseteq V(G) - V(H_1)$ takie, że:

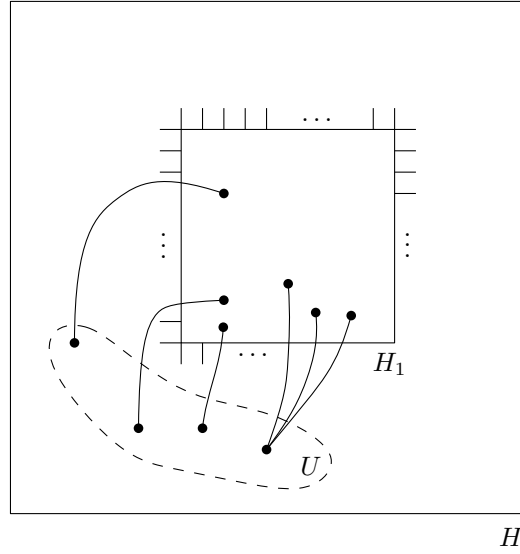
- (i) $|U| \leq \ell$,
- (ii) $G[V(H_1)]$ jest planarny oraz
- (iii) dla każdej krawędzi $xy \in E(G)$ jeśli $x \in V(H_1) - \delta_1(H_1)$, to $y \in V(H_1)$ lub $y \in U$.

Dowód. Ćwiczenie 10.1.

□

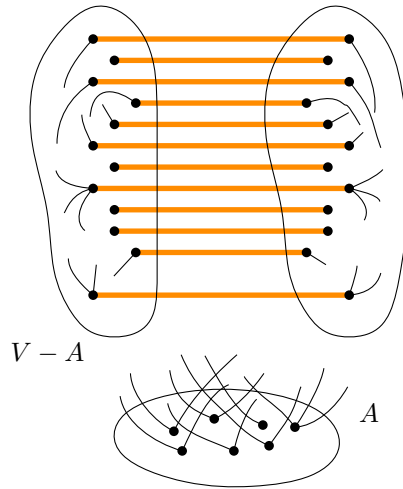
11. ROZŁĄCZNE A -ŚCIEŻKI

Niech G będzie grafem i $A \subseteq V(G)$. Ścieżka P w G jest A -ścieżką jeśli $|V(P)| \geq 2$, oba końce P leżą w A oraz żaden inny wierzchołek P nie leży w A . Maksymalną



liczbę parami rozłącznych A -ścieżek w G oznaczamy przez $\nu(G, A)$. W szczególności więc $\nu(G, V(G)) = \nu(G)$ jest równe wielkości największego skojarzenia w G .

Niech G' będzie grafem powstałym na bazie grafu G i zbioru $A \subseteq V(G)$ w następujący sposób (patrz Rysunek 11): $V(G') = V(G) \cup \{v' \mid v \in V(G) - A\}$, $E(G') = E(G) \cup \{u'v' \mid uv \in E(G - A)\} \cup \{uv' \mid uv \in E(G), u \in A, v \in V(G) - A\} \cup \{vv' \mid v \in V(G) - A\}$.



RYSUNEK 22. Konstrukcja grafu G' o własności $\nu(G, A) = \nu(G') - |V(G) - A|$.

Obserwacja 11.1 (Gallai). *Dla dowolnego grafu G oraz zbioru $A \subseteq V(G)$ zachodzi*

$$\nu(G, A) = \nu(G') - |V(G) - A|.$$

Dowód. Skojarzenie $N = \{vv' \mid v \in V - A\}$ w grafie G' ma moc $|V - A|$. Każda A -ścieżka $v_1v_2 \dots v_k$ w G indukuje ścieżkę powiększającą $v_1v_2v'_2v'_3v_3 \dots v_k$ dla skojarzenia N . Ponadto rozłączne A ścieżki indukują rozłączne ścieżki powiększające ścieżki dla skojarzenia N , więc $\nu(G') \geq |N| + \nu(G, A) = |V(G) - A| + \nu(G, A)$.

W drugą stronę jeżeli M jest największym skojarzeniem w G' , to różnica symetryczna $N \otimes M$ składa się z rozłącznych cykli i ścieżek alternujących. Co więcej wśród tych ścieżek alternujących jest co najmniej $|M| - |N|$ ścieżek powiększających dla skojarzenia N (to znaczy takich, że pierwsza i ostatnia krawędź są w M). Każda taka ścieżka powiększająca indukuje A -ścieżkę w G , a rozłączne ścieżki indukują rozłączne A -ścieżki. Mamy więc $\nu(G, A) \geq |M| - |N| = \nu(G') - |V - A|$. $\square$

Twierdzenie 11.2 (Gallai, 1961). *Dla każdej liczby całkowitej $k \geq 1$, dla każdego grafu G i $A \subseteq V(G)$ zachodzi*

- (i) G zawiera k parami rozłącznych ścieżek, lub
- (ii) istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| \leq 2k - 2$ i $G - X$ nie ma A -ścieżki.

Zatem istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| \leq 2\nu(G, A)$ i $G - X$ nie ma A -ścieżki.

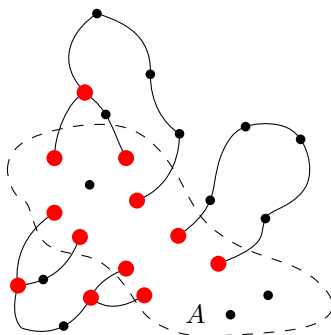
Dowód. Ćwiczenie 11.4. $\square$

Przedstawimy teraz krótszy argument, w szczególności nieużywający formuły Tutte'a-Berge'a, dowodzący słabszej wypowiedzi to jest takiej gdzie $|X| \leq 2k - 2$ zastąpimy $|X| \leq 4k$. Dowód ten jest znakomitą ilustracją techniki ramki, która działa z powodzeniem w wielu podobnych sytuacjach, gdy dowodzimy, że rozważany zbiór obiektów ma własność Erdősa-Pósy.

Obserwacja 11.3. *Każde drzewo o maksymalnym stopniu co najwyżej 3 oraz p liściach zawiera $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ parami rozłącznych ścieżek pomiędzy liśćmi.*

Dowód twierdzenia 11.2 dla $|X| \leq 4k$. Niech $F \subseteq G$ będzie maksymalnym na inkluzji lasem o następujących własnościach (patrz Rysunek 11):

- maksymalny stopień wierzchołka w F wynosi co najwyżej 3 i F nie ma wierzchołków izolowanych,
- każdy liść lasu F leży w A i każdy wierzchołek ze zbioru $A \cap V(F)$ jest liściem F .



RYSUNEK 23. Las F i wybrany podzbiór $X \subseteq V(F)$.

Niech c będzie liczbą spójnych składowych lasu F . Jeśli F zawiera co najmniej $2k + c$ wierzchołki z A , to aplikując Obserwację 11.3 otrzymujemy k rozłącznych A -ścieżek.

Jeśli zaś $|A \cap V(F)| < 2k + c$, to wybieramy

$$X = A \cap V(F) \cup \{v \in V(F) \mid \text{stopień } v \text{ w } F \text{ wynosi } 3\}.$$

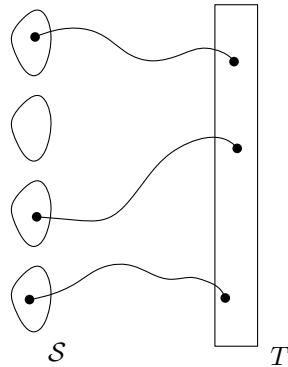
W każdym drzewie o stopniu maksymalnym ≤ 3 wiemy, że liczba wierzchołków o stopniu 3 jest równa liczbie liści odjąć 2. Zatem

$$|X| = |A \cap V(F)| + |A \cap V(F)| - 2c < 4k.$$

Twierdzimy, że X przecina każdą A -ścieżkę w G . Dla dowodu nie wprost niech P będzie A -ścieżką omijającą X , o końcach $a_1, a_2 \in A$. Ponieważ, wszystkie liście F są w X wnioskujemy, że $a_1, a_2 \notin V(F)$. Jeśli P jest rozłączne z F to $F \cup P$ byłby lasem przeczącym maksymalności wyboru F . Zatem P przecina F i niech v będzie pierwszym wierzchołkiem na P od strony a_1 , który jest w $V(F)$. Z własności F wiemy, że v ma stopień 2 lub 3 w F . Jeśli v ma stopień 3 w F , to X przecina P , sprzeczność. Jeśli v ma stopień 2 w F , to $F \cup P[a_1, v]$ przeczy maksymalności F , sprzeczność. $\square$

12. ROZŁĄCZNE ŚCIEŻKI TRANSVERSALNE

Niech G będzie grafem. Niech $S, T \subseteq V(G)$ i niech $\mathcal{S}$ będzie podziałem zbioru S . Oznaczmy przez $\mu(\mathcal{S}, T)$ maksymalną liczbę takich parami rozłącznych ścieżek z S do T w G , że mają one końce w różnych blokach $\mathcal{S}$. Innymi słowy $\mu(\mathcal{S}, T) = \max \kappa_G(S', T)$, gdzie maksimum jest brane po takich zbiorach $S' \subseteq S$, że S' zawiera co najwyżej jeden wierzchołek z każdego bloku $\mathcal{S}$.



RYSUNEK 24. $\mu(\mathcal{S}, T) \geq 3$.

Dla każdego zbioru $S' \subseteq S$ definiujemy

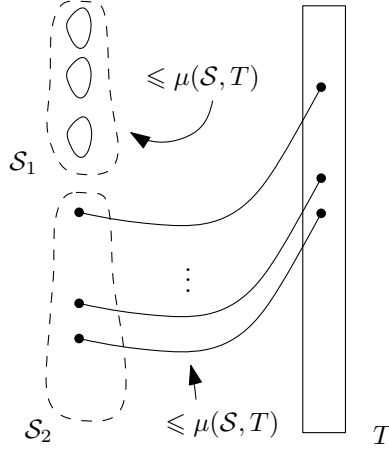
$$\begin{aligned} r_1(S') &= \kappa_G(S', T), \\ r_2(S') &= |\{A \in \mathcal{S} \mid S' \cap A \neq \emptyset\}|. \end{aligned}$$

Ćwiczenie (11.5). Wykazać, że $M_1 = (S, r_1)$ oraz $M_2 = (S, r_2)$ są matroidami.

Zauważ, że $\mu(\mathcal{S}, T)$ jest wielkością największego zbioru, który jest niezależny równocześnie w M_1 i w M_2 .

Twierdzenie 12.1. *Istnieje taki podział $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ zbioru $\mathcal{S}$, że*

$$|\mathcal{S}_1| \leq \mu(\mathcal{S}, T) \quad i \quad \kappa\left(\bigcup \mathcal{S}_2, T\right) \leq \mu(\mathcal{S}, T).$$



RYSUNEK 25. Podział $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ taki, że $\mathcal{S}_1$ jest małe i $\kappa_G(\bigcup \mathcal{S}_2, T)$ jest małe.

Dowód. Niech I będzie największym zbiorem niezależnym w M_1 i w M_2 . Niech $\mathcal{S}_1 = \{A \in \mathcal{S} \mid A \cap I \neq \emptyset\}$ oraz $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S} - \mathcal{S}_1$. Wtedy $|\mathcal{S}_1| = |I| = \mu(\mathcal{S}, T)$. Wystarczy więc wykazać, że $\kappa_G(\bigcup \mathcal{S}_2, T) \leq \mu(\mathcal{S}, T)$. Niech $S_2 = \bigcup \mathcal{S}_2$. Rozważmy dowolny element $v \in S_2$. Twierdzimy, że $v \in \text{clos}_{M_1}(I)$. W przeciwnym wypadku, ponieważ v należy do innego bloku $\mathcal{S}$ niż wszystkie elementy I , zbiór $I \cup \{v\}$ byłby niezależny w obu matroidach, sprzeczność z maksymalnością I . Zatem $S_2 \subseteq \text{clos}_{M_1}(I)$ i

$$\kappa_G(S_2, T) \leq \kappa_G(S_2 \cup I, T) = \kappa_G(I, T) = |I| = \mu(\mathcal{S}, T),$$

co było do pokazania. $\square$

Ćwiczenie (11.6). Załóżmy, że każdy blok w $\mathcal{S}$ jest spójny. Niech k oznacza maksymalną liczbę parami rozłącznych S - T -ścieżek o tej własności, że każdy blok w $\mathcal{S}$ zawiera koniec co najwyżej jednej ścieżki. Niech $B \subseteq V(G)$ będzie zbiorem przecinającym wszystkie bloki z $\mathcal{S}$. Wykazać, że $\kappa_G(B, T) \geq \frac{k}{2}$.

13. KONTROLOWANIE SKOKÓW NA KRATOWNICY

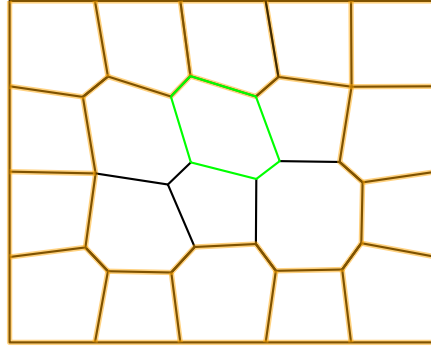
Niech $k, n \geq 2$. Graf H jest (k, n) -kratownicą jeśli istnieją rozłączne ścieżki $P_1, \dots, P_k$ oraz rozłączne ścieżki $Q_1, \dots, Q_n$ w H takie, że

$$H = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$$

oraz

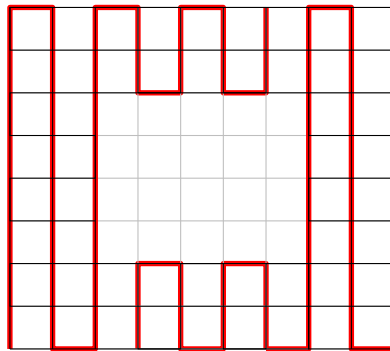
- (i) każda ścieżka P_i jest $(V(Q_1), V(Q_n))$ -ścieżką przecinającą ścieżki $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ w tej kolejności,
- (ii) każda ścieżka Q_j jest $(V(P_1), V(P_k))$ -ścieżką przecinającą ścieżki $P_1, P_2, \dots, P_k$ w tej kolejności,
- (iii) dla każdej pary ścieżek P_i oraz Q_j przecięcie ścieżek $P_i \cap Q_j$ jest ścieżką.

Wówczas mówimy, że ścieżki $P_1, P_2, \dots, P_k$ nazywamy *ścieżkami poziomymi* kratownicy H , zaś ścieżki $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ nazywamy *ścieżkami pionowymi* kratownicy H (ścieżki poziome i pionowe w ustalonej kratownicy nie są wyznaczone jednoznacznie). Patrz Rysunek 26. Równoważnie, graf H jest (k, n) -kratownicą, jeżeli jest minimalnym na inkluzję grafem planarnym zawierającym kratę $k \times n$ jako minor (ćwiczenie). (k', n') -podkratownicą (k, n) -kratownicy H nazywamy taką (k', n') -kratownicę $H' \subseteq H$, że każda ścieżka pozioma kratownicy H' jest zawarta w pewnej ścieżce poziomej kratownicy H i każda ścieżka pionowa kratownicy H' jest zawarta w pewnej ścieżce pionowej kratownicy H .



RYSUNEK 26. $(5, 6)$ -Kratownica H . Na zielono zaznaczona jest $(2, 3)$ -komórka, a na pomarańczowo $H[\delta_1(H)]$.

Jeżeli H jest (k, n) -kratownicą o ścieżkach poziomych $P_1, P_2, \dots, P_k$ i ścieżkach pionowych $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, to dla $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ oraz $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ jedyny cykl w grafie $P_i \cup P_{i+1} \cup Q_j \cup Q_{j+1}$ nazywamy (i, j) -komórką. Dla każdego $d \geq 1$ definiujemy zbiór $\delta_d(H)$ jako zbiór wierzchołków leżących w takich (i, j) -komórkach kratownicy H , że $\min(i, j, k-i, n-j) \leq d$. Graf indukowany $H[\delta_d(H)]$ jest 2-spójny oraz dla każdego $d \geq 1$ istnieją ścieżki R_1, R_2, R_3, R_4 w grafie H , że $H[\delta_d(H)] = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ (patrz Rysunek 27).



RYSUNEK 27. Dwie ścieżki wystarczą, aby pokryć wszystkie wierzchołki $\delta_d(H)$ leżące na pionowych ścieżkach kratownicy H . Kolejne dwie mogą pokryć wierzchołki leżące na poziomych ścieżkach.

Niech H będzie (k, n) -kratownicą o ścieżkach poziomych $P_1, P_2, \dots, P_k$ oraz ścieżkach pionowych $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. Ustalmy taki model $\{T_{ij}\}_{i \in [k], j \in [n]}$ kraty $k \times n$ w H , że dla każdego worka T_{ij} zachodzi $V(P_i \cap Q_j) \subseteq T_{ij}$. Z minimalności kratownicy wynika,

że $\bigcup_{i,j} T_{ij} = V(G)$ i dla każdego worka T_{ij} graf indukowany $G[T_{ij}]$ jest drzewem o co najwyżej czterech liściach. Dla dowolnych dwóch wierzchołków $v, w \in V(H)$ takich, że $v \in T_{ij}$ oraz $w \in T_{i'j'}$ definiujemy $\text{h-dist}(v, w) = |j - j'|$. Definicja funkcji h-dist zależy od wyboru modelu kraty, więc używając tej funkcji będziemy zakładać, że model jest ustalony.

Jeżeli kratownica H jest podgrafem grafu G , to *skokiem* w H nazywamy każdą $V(H)$ -ścieżkę, czyli ścieżkę w G o dodatniej długości przecinającą H tylko na końcach. Skok w P o końcach w $x, y \in V(H)$ jest d -długi, jeżeli

$$\text{h-dist}(x, y) \geq 2d \quad \text{oraz} \quad x, y \notin \delta_d(H).$$

Twierdzenie A. Istnieją takie funkcje $d = d_A(t)$, $f = f_A(t)$ oraz $n = n_A(t, n_1)$, że jeśli H jest (k, n) -kratownicą w grafie G niemającym K_t -minoru, to istnieją (k, n_1) -podkratownica H' oraz zbiór $U \subseteq V(G) - V(H')$ takie, że

- $|U| \leq f$ oraz
- każdy d -długi skok w H o co najmniej jednym końcu w $V(H')$ przecina zbiór U .

Dowód. Niech $d_A(t) = 4t$. Ustalmy model $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$ kraty $k \times n$ jak w definicji funkcji h-dist . Dla każdego $\ell \geq 1$ niech

$$X_\ell = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=(\ell-1)d+1}^{\ell d} T_{ij}.$$

Wówczas zbiory X_ℓ tworzą podział $V(H)$ na paski, gdzie każdy pasek jest sumą worków odpowiadających wierzchołkom leżącym na d kolejnych kolumnach kraty. Dla każdego $\ell \in \{0, 1, 2\}$ definiujemy zbiór

$$Z_\ell = \delta_d(H) \cup \bigcup_i X_{3i+\ell}.$$

Zbiory Z_ℓ pokrywają całą kratownicę H i każdy d -długi skok jest rozłączny z pewnym z tych zbiorów (bo każdy koniec znajduje się tylko w jednym z tych trzech zbiorów). Będziemy więc w trzech krokach czyścić kratownicę z d -długich skoków omijających kolejne zbiory Z_ℓ . Wykażemy, że dla każdego ℓ zachodzi następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 13.1. Istnieją takie funkcje $n_0 = n_0(t, n_1)$, $f_0(t)$, że jeżeli H_0 jest (k, n_0) -podkratownicą kratownicy H , to istnieją (k, n_1) -podkratownica H_1 kratownicy H_0 oraz zbiór U_1 takie, że

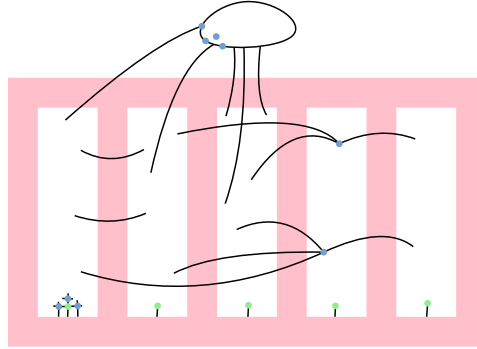
- $|U_1| \leq f_0(t)$ oraz
- każdy d -długi skok w H rozłączny z Z_ℓ o co najmniej jednym końcu w $V(H_1)$ przecina zbiór U_1 .

Założmy, że powyższe stwierdzenie jest prawdziwe. Niech $f_A(t) = 3f_0(t)$ oraz $n_A(t, n_1) = n_0(t, n_0(t, n_0(t, n_1)))$. Korzystając ze Stwierdzenia trzykrotnie możemy otrzymać zstępujący ciąg podkratownic $H_1 \supseteq H_2 \supseteq H_3$ oraz zbiory U_1, U_2, U_3 o tej własności, że dla $\ell \in \{0, 1, 2\}$ każdy d -długi skok w H rozłączny z Z_ℓ o co najmniej

jednym końcu w $V(H_{\ell+1})$ przecina zbiór $U_{\ell+1}$. Teza zadania zachodzi więc dla podkratownicy $H' = H_3$ oraz zbioru $U = U_1 \cup U_2 \cup U_3$. Pozostaje zatem udowodnić Stwierdzenie.

Niech $\mathcal{H}$ będzie zbiorem komponentów grafu $G - Z_\ell$ i niech $A \subseteq V(G) - Z_\ell$ będzie dowolnym zbiorem przecinającym każdy komponent z $\mathcal{H}$ w jednym wierzchołku sąsiadującym z Z_ℓ w H . Załóżmy, że istnieje rodzina $\mathcal{P}$ rozłącznych A -ścieżek o mocy co najmniej $m_{10.5}(t)$. Wówczas podgraf $H[Z_\ell \cup A] \cup \bigcup \mathcal{P}$ grafu G zawiera jako minor kratę z $m_{10.5}(t)$ niezależnymi krawędziami daleko od brzegu. Wtedy na mocy lematu 10.5 $K_t \prec G$ – sprzeczność.

Możemy więc założyć, że $\nu(G - Z_\ell, A) \leq m_{10.5}(t)$. Na mocy twierdzenia 11.2 istnieje taki zbiór $Y \subseteq V(G)$, że $|Y| \leq 2m_{10.5}(t)$ oraz każda A -ścieżka w G przecina Y . Niech $\mathcal{H}_1 = \{H' \in \mathcal{H} \mid V(H') \cap Y \neq \emptyset\}$. Dla każdego $H' \in \mathcal{H}_1$ wybierzmy dowolną taką podkratownicę H'' kratownicy H , że $H' \subseteq H''$ oraz $|V(H'')|$ jest najmniejsze możliwe i niech $\mathcal{H}_2$ będzie zbiorem wszystkich kratownic H'' otrzymanych w ten sposób. Wówczas każdą kratownicę $H'' \in \mathcal{H}_2$ można pokryć dwoma ścieżkami, a ich sumę $\bigcup \mathcal{H}_2$ można pokryć $8m_{10.5}(t)$ ścieżkami.



RYSUNEK 28. Zbiór Y trafia wszystkie A -ścieżki w $G - Z_\ell$ (zbiór Z_ℓ zaznaczony na różowo, A na zielono a Y na niebiesko).

Niech $T = \bigcup_{H'' \in \mathcal{H}_2} V(H'')$ i $\mathcal{S} = \{V(H') \mid H' \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_1\}$. Ponadto niech $S = \bigcup \mathcal{S}$, $B = A \cap S$ oraz $Z'_\ell = Z_\ell - T$. Gdyby w $G - Z'_\ell$ istniało $8m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t)$ rozłącznych (B, T) -ścieżek to istniałoby $m_{10.4}(t)$ rozłącznych $(B, V(P))$ -ścieżek w $G - Z'_\ell$ dla pewnej ścieżki P , jednej spośród $8m_{10.5}(t)$ ścieżek pokrywających $\bigcup \mathcal{H}_2$. Wtedy na mocy lematu 10.4 istniałby $K_t \prec G$ – sprzeczność.

Mamy więc $\kappa_{G-Z'_\ell}(B, T) \leq 8m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t)$. Zachodzi nierówność $\mu_{G-Z'_\ell}(\mathcal{S}, T) \leq 2\kappa_{G-Z'_\ell}(B, T)$ (Ćwiczenie 11.6), więc $\mu_{G-Z'_\ell}(\mathcal{S}, T) \leq 16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t)$. Na mocy twierdzenia 12.1 istnieje taki podział $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ zbioru $\mathcal{S}$, że $|\mathcal{S}_1| \leq 16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t)$ oraz $\kappa_{G-Z'_\ell}(\bigcup \mathcal{S}_2, T) \leq 16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t)$. Z twierdzenia Mengera istnieje taki zbiór $W \subseteq V(G - Z'_\ell)$, że $|W| \leq 16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t)$ oraz każda $(\bigcup \mathcal{S}_2, T)$ -ścieżka w $G - Z'_\ell$ przecina W .

Niech $U_1 = Y \cup W$. Liczba komponentów w $H - Z_\ell$ przecinających zbiór U_1 wynosi co najwyżej $|U_1| \leq f_0(t) = 16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t) + 4m_{10.5}(t)$, zaś liczba komponentów w $\mathcal{S}_1$ wynosi co najwyżej $16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t)$. Jeśli więc $n_0 \geq (16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t) +$

$4m_{10.5}(t) + 16m_{10.5}(t) \cdot m_{10.4}(t) + 1) \cdot n_1/(3d)$, to znajdziemy (k, n_1) -podkratownicę H_1 kratownicy H_0 , która przecina jedynie takie komponenty z $G - Z_\ell$, które są rozłączne z U_1 i nie są w zbiorze $\mathcal{S}_1$ (zatem H_1 przecina jedynie komponenty z $\mathcal{S}_2$). Twierdzimy, że kratownica H_1 i zbiór U_1 spełniają warunki Stwierdzenia. Niech P będzie d -długim skokiem w H rozłącznym z Z_ℓ i mającym koniec w H_1 . Wykażemy, że skok ten przecina zbiór U_1 . Koniec skoku P będący w H_1 znajduje się w komponencie ze zbioru $\mathcal{S}_2$. Jeżeli drugi koniec jest w zbiorze T , to skok P jest $(\cup \mathcal{S}_2, T)$ -ścieżką, więc przecina zbiór W . Jeżeli zaś drugi koniec nie jest w T , to oba końce są w komponentach ze zbioru $\mathcal{S}$, zatem oba komponenty są rozłączne z Y . Skok P musi więc przecinać zbiór Y , gdyż w przeciwnym razie można by go przedłużyć do A -ścieżki rozłącznej z Y_ℓ . Faktycznie więc w obu przypadkach skok P przecina zbiór U_1 . $\square$

Skok w H o końcach x, y jest d -brzegowy, jeśli $x \notin \delta_{3d}(H)$ i $y \in \delta_d(H)$ (lub na odwrót).

Twierdzenie B. Istnieją takie funkcje $d = d_B(t)$, $f = f_B(t)$ oraz $n = n_B(t, n_1)$, że jeśli H jest (k, n) -kratownicą w grafie G niemającym K_t -minoru, to istnieją (k, n_1) -podkratownica H'' oraz zbiór $U \subseteq V(G) - V(H'')$ takie, że

- $|U| \leq f$ oraz
- każdy d -długi lub d -brzegowy skok w H o co najmniej jednym końcu w $V(H'')$ przecina zbiór U .

Dowód. Niech $d_B(t) = d_A(t)$. Niech $\{T_{ij} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n\}$ będzie takim modelem kraty $k \times n$ w H , jak w definicji funkcji h-dist. Dla każdego ℓ definiujemy zbiór

$$X_\ell = \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=(\ell-1)(2d)+1}^{\ell(2d)} V(T_{ij}).$$

Dla $\ell \in \{0, 1\}$ niech

$$Z_\ell = (\delta_{3d}(H) \cup \bigcup_i X_{2i+\ell}) \setminus \delta_d(H).$$

Wówczas dla każdego d -brzegowego skoku istnieje takie $\ell \in \{0, 1\}$, że końce skoku leżą w różnych komponentach $H - Z_\ell$. Na mocy twierdzenia A możemy znaleźć dużą podkratownicę H' kratownicy H oraz nieduży zbiór $U' \subseteq V(G) - V(H')$ takie, że każdy d -długi skok w H o co najmniej jednym końcu w H' przecina U' . Podobnie jak w dowodzie twierdzenia A będziemy osobno czyścić kratownicę z d -brzegowych skoków omijających każdy ze zbiorów Z_0 i Z_1 . Wystarczy wykazać następujące stwierdzenie dla $\ell \in \{0, 1\}$.

Stwierdzenie 13.2. Istnieją takie funkcje $n_0 = n_0(t, n_1)$, $f_0(t)$, że jeżeli H_0 jest taką (k, n_0) -podkratownicą kratownicy H' , że każdy d -długi skok w H nie ma ani jednego końca w H_0 , to istnieją (k, n_1) -podkratownica H_1 kratownicy H_0 oraz zbiór $U_1 \subseteq V(G) - V(H_1)$ takie, że

- $|U_1| \leq f_0(t)$ oraz
- każdy d -brzegowy skok w H rozłączny z Z_ℓ o co najmniej jednym końcu w $V(H_1)$ przecina zbiór $(U' \cup U_1)$.

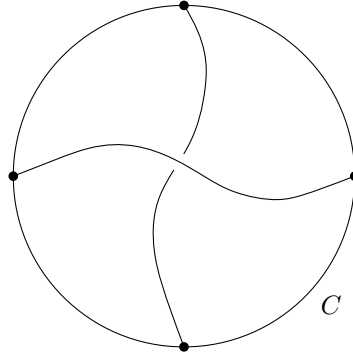
Niech $T = \delta_{3d}(H)$ i niech $\mathcal{S} = \{V(\tilde{H}) : \tilde{H} \text{ jest komponentem } H_0 - (Z_\ell \cup T)\}$. Skoro każdy d -długi skok w H o co najmniej jednym końcu w H_0 przecina zbiór U' , to w $G - (Z_\ell \cup T \cup U')$ nie ma ścieżek pomiędzy różnymi blokami z $\mathcal{S}$. Stąd, skoro G nie ma K_t -minoru, to na mocy twierdzenia 10.4 wnioskujemy, że $\mu_{G-(Z_\ell \cup U')}(\mathcal{S}, T) \leq m_{10.4}(t)$, a co za tym idzie

$$\mu_{G-Z_\ell}(\mathcal{S}, T) \leq |U'| + m_{10.4}(t) \leq f_A(t) + m_{10.4}(t).$$

Wobec tego na mocy twierdzenia 12.1 istnieje taki podział $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2)$ zbioru $\mathcal{S}$, że $|\mathcal{S}_1| \leq f_A(t) + m_{10.4}(t)$ oraz $\kappa_{G-Z_\ell}(\bigcup \mathcal{S}_2, T) \leq f_A(t) + m_{10.4}(t)$. Na mocy twierdzenia Menger'a istnieje taki zbiór $U_1 \subseteq V(G)$, że $|U_1| \leq m_{10.4}(t)$ oraz każda $(\bigcup \mathcal{S}_2, T)$ -ścieżka w $G - Z_\ell$ przecina zbiór U_1 . Teraz jeżeli n_0 jest odpowiednio duże (względem t), to istnieje (k, n_1) -podkratownica H_1 kratownicy H_0 , która jest rozłączna z U_1 oraz ze wszystkimi blokami z $\mathcal{S}_1$. Łatwo przekonać się, że kratownica H_1 oraz zbiór U_1 spełniają warunki Stwierdzenia. $\square$

14. TWIERDZENIE O DWÓCH ŚCIEŻKACH

Niech G będzie grafem, a C cyklem w G . Ścieżka P w G jest C -ścieżką jeśli P ma dwa końce na cyklu C , żaden wewnętrzny wierzchołek ścieżki P nie leży na cyklu C oraz $E(P) \cap E(C) = \emptyset$. Mówimy, że dwie C -ścieżki P_1 i P_2 krzyżują się, jeżeli graf $C \cup P_1 \cup P_2$ jest izomorficzny z pewnym podpodziałem grafu K_4 .



RYSUNEK 29. Krzyżujące się C -ścieżki.

Chcemy opisać strukturę takich par (G, C) dla których nie istnieje para krzyżujących się C -ścieżek. W przypadku, gdy G jest grafem 4-spójnym, ta struktura jest bardzo porządna:

Twierdzenie 14.1 (Jung 1970; Seymour 1980; Shiloach 1980; Thomassen 1980). *Niech G będzie grafem 4-spójnym, a C cyklem w G . Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (i) G nie zawiera pary krzyżujących się C -ścieżek;
- (ii) G jest planarny i istnieje zanurzenie G w płaszczyznę takie, że C jest ścianą zewnętrzną w tym zanurzeniu.

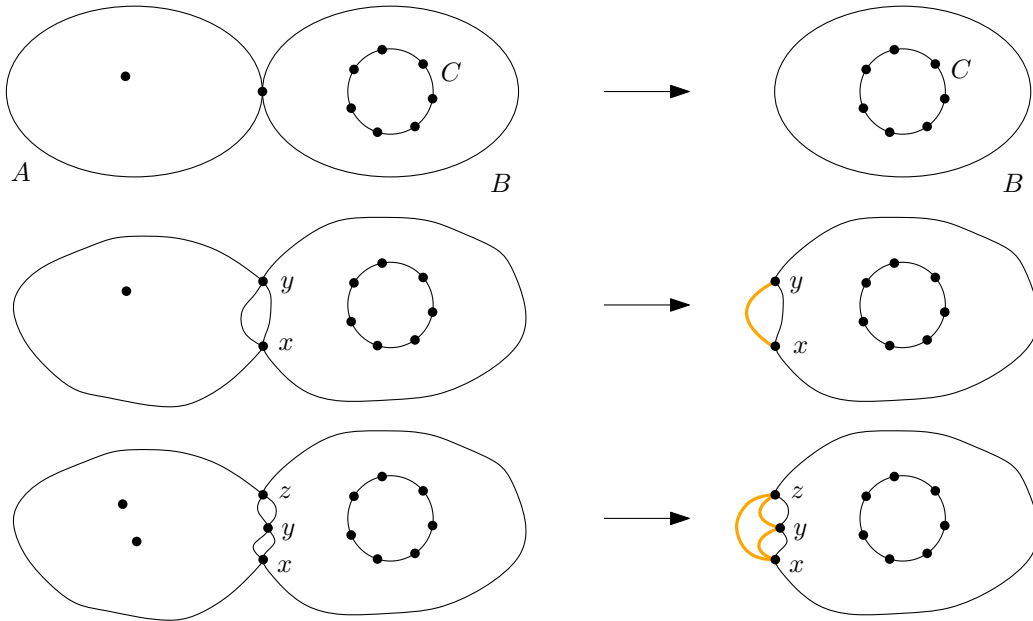
Jednak nas interesują również grafy, które niekoniecznie są 4-spójne, dlatego potrzebujemy silniejszej wypowiedzi tego twierdzenia. Aby sformułować tę silniejszą wypowiedź musimy zdefiniować wewnętrzną 4-spójność grafu.

Niech G będzie grafem, a C cyklem w grafie G . Niech (A, B) będzie taką separacją grafu G , że $V(A) - V(B) \neq \emptyset$ oraz $E(C) \subseteq E(B)$. Jeżeli $\text{ord}(A, B) \leq 3$, to być może stosując jedną z następujących redukcji możemy otrzymać taki graf $H \prec G$, że G zawiera parę krzyżujących się C -ścieżek wtedy i tylko wtedy, gdy H zawiera parę krzyżujących się C -ścieżek (patrz Rysunek 30).

Redukcja 1. Jeżeli $\text{ord}(A, B) < 2$, to możemy wziąć $H = B$.

Redukcja 2. Jeżeli w grafie G nie można zastosować Redukcji 1 oraz $\text{ord}(A, B) = 2$, to bierzemy $H = B \cup \{xy\}$, gdzie $\{x, y\} = V(A) \cap V(B)$.

Redukcja 3. Jeżeli w grafie G nie można zastosować Redukcji 1, ani Redukcji 2, oraz $\text{ord}(A, B) = 3$ i $|V(A) - V(B)| \geq 2$, to możemy wybrać $H = B \cup \{xy, yz, zx\}$, gdzie $\{x, y, z\} = V(A) \cap V(B)$. Aby przekonać się, że H jest minorem grafu G , zauważmy najpierw, że gdyby A był lasem, to byłby niespójny lub zawierałby wierzchołek o stopniu 2, co przeczyłoby temu, że nie da się zastosować wcześniejszych redukcji. Wobec tego istnieje cykl C' w grafie A . Skoro nie da się stosować wcześniejszych redukcji, to na mocy twierdzenia Mengera istnieją trzy parami rozłączne $(V(A) \cap V(B), V(C'))$ -ścieżki, więc faktycznie $H \prec G$.



RYСУNEK 30. Redukcje dla problemu znajdowania krzyżujących się C -ścieżek.

Mówimy, że graf G jest *wewnętrznie 4-spójny* względem cyklu C , gdy nie można zastosować żadnej z powyższych trzech redukcji, to znaczy jeżeli nie istnieje separacja (A, B) taka, że $E(C) \subseteq E(B)$ oraz

- (i) $\text{ord}(A, B) \leq 2$ oraz $|V(A) - V(B)| \geq 1$, lub

(ii) $\text{ord}(A, B) = 3$ oraz $|V(A) - V(B)| \geq 2$.

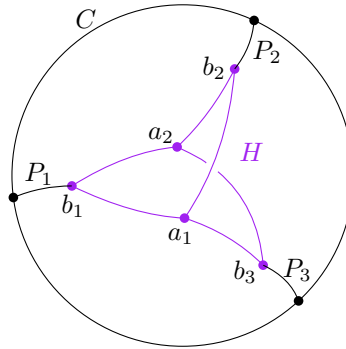
Wniosek 14.2. *Niech G będzie grafem, a C cyklem w G . Wówczas istnieją takie grafy $H, H_1, H_2, \dots, H_t$, że graf H jest wewnętrznie 4-spójny względem C oraz graf G możemy otrzymać jako sumę klikową grafów $H, H_1, \dots, H_t$, gdzie za każdym razem sumujemy wzdłuż kliki o mocy co najwyżej 3.*

Naszym celem jest dowód następującego wzmocnienia twierdzenia 14.1.

Twierdzenie 14.3. *Niech G będzie grafem wewnętrznie 4-spójnym względem cyklu C . Wówczas albo G zawiera parę krzyżujących się ścieżek, albo G jest planarny i istnieje zanurzenie G na płaszczyźnie z cyklem C na zewnętrznej ścianie.*

Najpierw jednak musimy wprowadzić pojęcie trójnoga oraz udowodnić dwa lematy.

Niech G będzie grafem, a C cyklem w G . Niech $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in V(G)$ będą pięcioma różnymi wierzchołkami, gdzie $a_1, a_2 \notin V(C)$. Niech H będzie podgrafem G będącym podpodziałem grafu pełnego dwudzielnego między zbiorami $\{a_1, a_2\}$ i $\{b_1, b_2, b_3\}$ i założmy dodatkowo, że graf H jest rozłączny z cyklem C , być może poza wierzchołkami b_1, b_2, b_3 . Wreszcie niech P_1, P_2, P_3 będą takimi parami rozłącznymi $(V(H), V(C))$ -ścieżkami, że dla $i \in \{1, 2, 3\}$ ścieżka P_i ma koniec w b_i (dopuszczamy, by ścieżka P_i miała długość 0). Wówczas parę $(H, \{P_1, P_2, P_3\})$ nazywamy *trójnogiem* na cyklu C (patrz Rysunek 31).

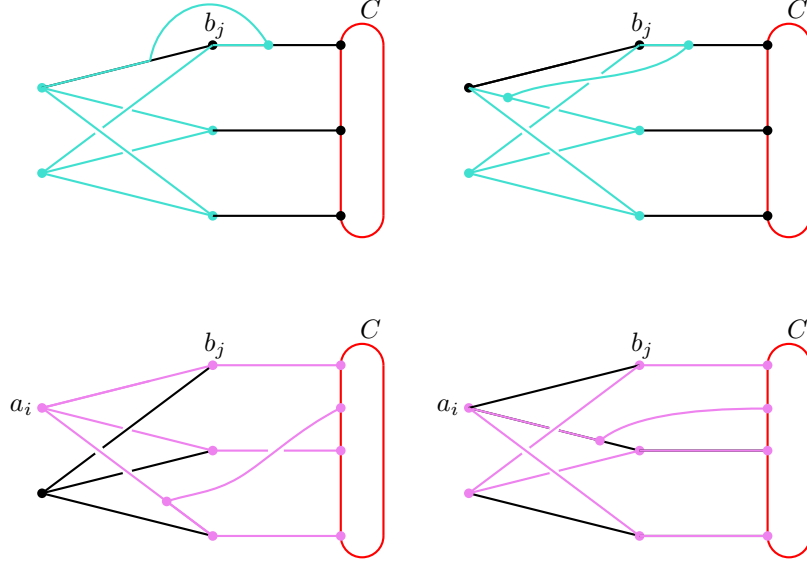


RYSUNEK 31. Trójnog na cyklu C .

Lemat 14.4. *Niech G będzie grafem wewnętrznie 4-spójnym względem cyklu C . Wówczas jeżeli istnieje trójnog na cyklu C , to graf G ma dwie krzyżujące się C -ścieżki.*

Dowód. Niech $(H, \{P_1, P_2, P_3\})$ będzie takim trójnogiem na cyklu C , że wartość $|V(P_1 \cup P_2 \cup P_3)|$ jest najmniejsza możliwa. Niech a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 będą jak w definicji trójnoga. Skoro graf G jest wewnętrznie 4-spójny względem C , to usunięcie zbioru $\{b_1, b_2, b_3\}$ z grafu G nie odseparuje obu punktów a_1 i a_2 od cyklu C , istnieje więc ścieżka Q rozłączna ze zbiorem $\{b_1, b_2, b_3\}$, której końce s i t spełniają $s \in V(H)$ oraz $t \in V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) \cup V(C)$. Wówczas wierzchołek s leży na pewnej ścieżce otrzymanej przez podział pewnej krawędzi $a_i b_j$.

Wierzchołek t zaś albo leży na pewnej ścieżce $P_{j'}$, albo na cyklu C między końcami ścieżek $P_{j'+1}$ oraz $P_{j'+2}$. W pierwszym przypadku zarówno, gdy $j = j'$, jak i $j \neq j'$ możemy znaleźć taki trójnóg $(H', \{P'_1, P'_2, P'_3\})$, że $|V(P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3)| < |V(P_1 \cup P_2 \cup P_3)|$ (patrz Rysunek 32), co przeczy wyborowi trójnoga $(H, \{P_1, P_2, P_3\})$. Z kolei w drugim przypadku jesteśmy w stanie znaleźć parę krzyżujących się C -ścieżek (patrz Rysunek 32). $\square$



RYSUNEK 32. W każdym przypadku znajdziemy trójnóg o mniejszej liczbie wierzchołków na ścieżkach P_i albo parę krzyżujących się C -ścieżek.

Lemat 14.5. *Niech C będzie cyklem o długości co najmniej 4 w 3-spójnym grafie G . Wówczas jeżeli graf G nie ma dwóch krzyżujących się C -ścieżek, to istnieje taka indukowana C -ścieżka P w grafie G , że graf $G - P$ ma dokładnie dwie spójne składowe, każda zawierająca inną składową grafu $C - P$.*

Dowód. Skoro G jest grafem 3-spójnym, to po usunięciu dwóch niesąsiednich wierzchołków na cyklu C graf G pozostaje spójny, więc w szczególności istnieje jakaś C -ścieżka, powiedzmy o końcach w wierzchołkach x i y . Wówczas dla każdej C -ścieżki Q o końcach w x i y skoro G nie ma dwóch krzyżujących się C ścieżek, to graf $G - Q$ ma dokładnie dwie spójne składowe B_1 i B_2 przecinające niepusto cykl C . Niech P będzie taką C -ścieżką o końcach w x i y , dla której wartość $|B_1| + |B_2|$ jest największa możliwa. Wykażemy, że P jest ścieżką indukowaną oraz że B_1 i B_2 są jedynymi składowymi grafu $G - P$.

Niech $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ będzie zbiorem tych wierzchołków na ścieżce P , które w grafie G mają co najmniej jednego sąsiada w zbiorze $V(B_1) \cup V(B_2)$. Załóżmy, że wierzchołki te są podane w tej kolejności, w której występują na ścieżce P . Niech B będzie składową grafu $G - P$ różną od B_1 i B_2 . Jeżeli B sąsiaduje z dwoma wierzchołkami a i b na ścieżce P , to żaden wierzchołek x_i nie leży na ścieżce P ściśle między wierzchołkami a i b ; w przeciwnym razie moglibyśmy przekierować ścieżkę P w taki sposób, by wierzchołek x_i znalazł się w którymś ze zbiorów B_1 lub B_2 , więc

mielibyśmy większą wartość $|B_1| + |B_2|$. Analogiczny argument dowodzi, że jeśli krawędź $ab \in E(G)$ łączy dwa różne wierzchołki na ścieżce P , to między a a b nie znajduje się żaden wierzchołek x_i .

Gdyby istniała składowa B grafu $G - P$ różna od B_1 i B_2 , to sąsiadowałaby ona z wierzchołkami P na pewnej podścieżce o końcach w x_i i x_{i+1} . Zgodnie z powyższym rozumowaniem $\{x_i, x_{i+1}\}$ rozspójnia graf G , co przeczy założeniu o 3-spójności grafu. Analogicznie żadna krawędź grafu G nie może mieć obu końców na podścieżce o końcach w x_i i x_{i+1} , więc P jest ścieżką indukowaną. $\square$

Dowód twierdzenia 14.3. Załóżmy, że para (G, C) jest kontrprzykładem o najmniejszej wartości $|V(G)|$. Najpierw wykażemy, że graf G jest 3-spójny. Załóżmy nie wprost, że istnieje taka separacja (A, B) grafu G , że $V(A) - V(B) \neq \emptyset$ i $V(B) - V(A) \neq \emptyset$ oraz $\text{ord}(A, B) \leq 2$. Skoro G jest grafem wewnątrznie 4-spójnym względem cyklu C , to oba zbiory $V(A) - V(B)$ i $V(B) - V(A)$ zawierają wierzchołki z cyklu C . Wobec tego $\text{ord}(A, B) = 2$. Niech $\{x, y\} = V(A) \cap V(B)$. Wówczas grafy $G_1 = A \cup \{xy\}$ oraz $G_2 = B \cup \{xy\}$ są mniejszymi grafami, które są wewnątrznie 4-spójne względem cykli $C_1 = (C \cap A) \cup \{xy\}$ oraz $C_2 = (C \cap B) \cup \{xy\}$ odpowiednio. Jeżeli któryś z grafów G_i zawiera krzyżujące się C_i ścieżki, to również G zawiera krzyżujące się ścieżki. Jeżeli zaś oba grafy G_i mają planarne zanurzenia z cyklami C_i na zewnętrznych ścianach, to łącząc te zanurzenia wzdłuż krawędzi xy otrzymujemy zanurzenie grafu G z cyklem C na zewnętrznej ścianie. W obu przypadkach otrzymujemy sprzeczność z tym, że para (G, C) jest kontrprzykładem. Graf G faktycznie więc jest 3-spójny.

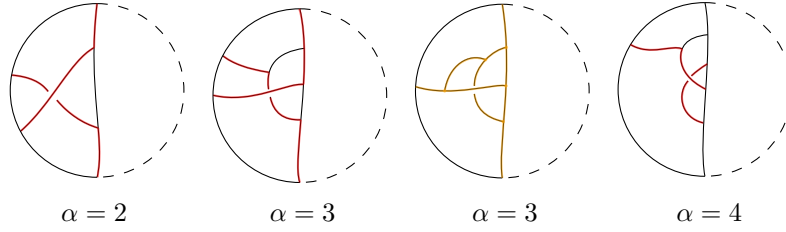
Na mocy lematu 14.5 istnieje taka indukowana C -ścieżka P w grafie G , że $G - P$ ma dwie spójne składowe B_1 i B_2 , każda zawierająca inną składową grafu $C - P$. Dla $i \in \{1, 2\}$ niech $G_i = G[V(B_i) \cup V(P)]$ i niech $C_i = (C \cap G_i) \cup P$. Wówczas każdy graf G_i jest wewnątrznie 4-spójny względem cyklu C_i , a ponadto ma mniej wierzchołków niż graf G , więc zachodzi dla nich teza. Gdyby oba grafy G_i miały planarne zanurzenia z cyklami C_i na ścianach zewnętrznych, to łącząc te zanurzenia wzdłuż ścieżki P otrzymalibyśmy planarne zanurzenie grafu G z cyklem C na ścianie zewnętrznej – sprzeczność.

Możemy więc bez straty ogólności założyć, że w G_1 istnieją dwie krzyżujące się C_1 -ścieżki P_1 oraz P_2 . Niech α oznacza łączną liczbę końców ścieżek P_1 i P_2 na ścieżce P , to znaczy niech $\alpha = |V(P_1) \cap V(P)| + |V(P_2) \cap V(P)|$. Wybierzmy ścieżki P_1 i P_2 w taki sposób, żeby wartość α była najmniejsza możliwa.

Przypadek 1. Jeżeli $\alpha \leq 2$, to możemy przedłużyć ścieżki P_1 i P_2 do krzyżujących się C -ścieżek w G , co przeczy temu, że para (G, C) jest kontrprzykładem.

Przypadek 2. Jeżeli $\alpha = 3$, to ze spójności grafu $G_1 - P$ wynika, że istnieje w nim $(V(P_1), V(P_2))$ ścieżka Q . Jeżeli ścieżka Q zawiera wierzchołek ze zbioru $V(C) - V(P)$, to przekierowując jedną ze ścieżek P_1 lub P_2 możemy otrzymać parę krzyżujących się C ścieżek dla której $\alpha = 2$. Jeżeli zaś ścieżka Q jest rozłączna z cyklem C , to dostajemy trójnóg na cyklu C , więc na mocy lematu 14.4 graf G zawiera parę krzyżujących się C -ścieżek, więc nie jest kontrprzykładem.

Przypadek 3. Jeżeli $\alpha = 4$, to ze spójności grafu $G_1 - P$ wynika, że dla pewnego $i \in \{1, 2\}$ istnieje w nim $(V(P_i), V(C))$ -ścieżka rozłączna z P_{3-i} . Wtedy jednak możemy przekierować ścieżkę P_i w taki sposób, aby otrzymać $\alpha = 3$. $\square$



RYSUNEK 33. Bez względu na wartość α zawsze znajdziemy krzyżujące się C -ścieżki, trójnóg, lub krzyżujące się C_1 -ścieżki o mniejszej wartości α .

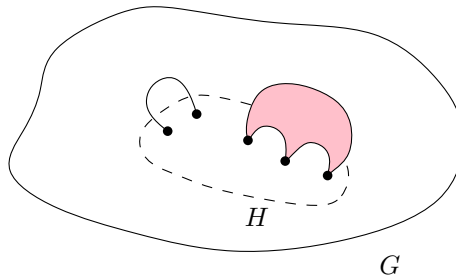
15. TWIERDZENIE O PŁASKIM MURZE

Twierdzenie o kracie, twierdzenie B oraz twierdzenie o dwu ścieżkach złożą się w tej sekcji w dowódzie twierdzenie o płaskim murze. Nim do niego dojdziemy, powtórzmy i wzmocnimy (w sposób oczywisty) opracowane już twierdzenia.

Niech G będzie grafem i niech $H \subseteq G$. Podgraf $B \subseteq G$ jest H -mostem w G , jeśli

- (i) H jest ścieżką długości 1 (jedna krawędź) taką, że $V(H) \subseteq V(B)$ oraz $E(H) \cap E(B) = \emptyset$, lub
- (ii) B jest spójną składową grafu $G - V(H)$ wraz ze wszystkimi krawędziami grafu G z jednym końcem w tej spójnej składowej a drugim w $V(H)$.

Przyczepieniami H -mostu B nazywamy wierzchołki ze zbioru $V(B) \cap V(H)$.

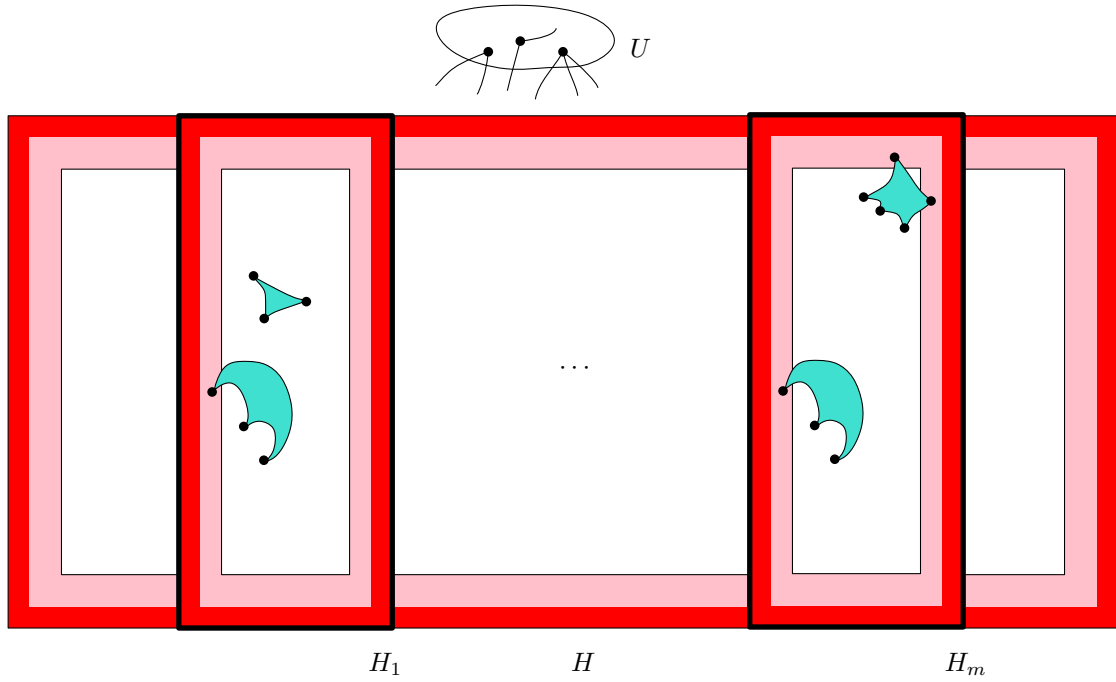


RYSUNEK 34. H -mosty w G .

Twierdzenie B'. Istnieją takie funkcje $d = d_{B'}(t)$, $f = f_{B'}(t)$ oraz $n = n_{B'}(t, n_1, m)$, że jeśli H jest (k, n) -kratownicą w grafie G niemającym K_t -minoru, to istnieją rozłączne (k, n_1) -podkratownice $H_1, \dots, H_m$ kratownicy H oraz zbiór $U \subseteq V(G) - (V(H_1) \cup \dots \cup V(H_m))$ takie, że

- $|U| \leq f$ oraz

- dla każdego $i \in [m]$ każdy $(H - U)$ -most w $G - U$ o przyczepieniu w $H_i - \delta_{3d}(H_i)$ ma wszystkie przyczepienia w $H_i - \delta_d(H_i)$.



RYSUNEK 35. Twierdzenie B wzmocnione.

Graf H jest *płytkim zanurzeniem* grafu G , jeżeli

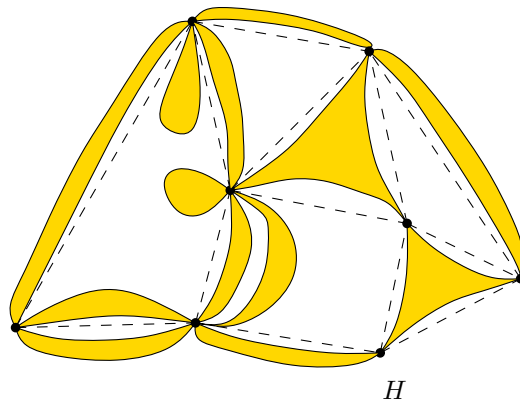
- (i) $H \prec G$ w mocnym sensie, to znaczy $V(H) \subseteq V(G)$ oraz istnieje taki model grafu H w G , że każdy wierzchołek $x \in V(H)$ jest elementem worka odpowiadającego temu wierzchołkowi.
- (ii) H jest grafem planarnym,
- (iii) jeśli $X \subseteq V(H)$ jest zbiorem przyczepień $V(H)$ -mostu B w G , to $|X| \leq 3$ i X jest kliką w H .

Twierdzenie 15.1 (o dwu ścieżkach na nowo). *Niech G będzie grafem, a C cyklem w G . Wtedy*

- (i) G zawiera parę krzyżujących się C -ścieżek lub
- (ii) istnieje płaskie zanurzenie H grafu G takie, że C ogranicza ścianę w H .

Twierdzenie 15.2 (o płaskim murze; Flat Wall Theorem). *Istnieją takie funkcje $f = f(t)$, $n = n(t, n_1)$, że jeśli graf G zawiera $n \times n$ kratownicę i $K_t \not\subseteq G$, to istnieje podgraf $G_1 \subseteq G$, płaskie zanurzenie H_1 grafu G_1 oraz zbiór $Z \subseteq V(G) - V(G_1)$ takie, że*

- $|Z| \leq f(t)$,
- każdy G_1 -most w $G - Z$ ma wszystkie przyczepienia na zewnętrznej ścianie H_1 .
- $\boxplus_{n_1} \prec H_1$.



RYSUNEK 36. Płaskie zanurzenie H grafu G . Pomarańczowe bąble to $V(H)$ -mosty G .

Dowód. Niech $k = n_1 + 6d + 4$ oraz niech n będzie na tyle dużą wartością, że (na mocy twierdzenia B) znajdziemy w G mały zbiór Z oraz t^2 rozłącznych $k \times k$ podkratownic $H_1, \dots, H_{t^2}$ takich jak w twierdzeniu B'. Niech C_i będzie cyklem w H_i złożonym z wierzchołków odległych od brzegu o $d + 2$, a G_i niech będzie $(n_1 + 4d) \times (n_1 + 4d)$ podkratownicą kratownicy H_i ograniczoną cyklem $C_i \dots$ $\square$

DODATEK A. POWIERZCHNIE I ZANURZENIA GRAFÓW

Celem tej sekcji jest wprowadzenie do zagadnienia powierzchni dla czytelnika nie mającego wcześniejszej styczności z topologią. Zakładamy jedynie, że czytelnik jest zaznajomiony z pojęciem przestrzeni metrycznej oraz ciągłości funkcji między dwoma przestrzeniami metrycznymi. Powierzchnie są topologiami metryzowalnymi (to znaczy takimi, w których topologia jest zadana przez metrykę), więc nie ma potrzeby wprowadzać definicji przestrzeni topologicznej, czy aksjomatów oddzielania.

Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. *Homeomorfizmem* tych przestrzeni nazywamy taką bijekcję $f : X \rightarrow Y$, że zarówno f jak i f^{-1} są funkcjami ciągłymi. Jeżeli istnieje homeomorfizm, to mówimy, że przestrzenie są *homeomorficzne* i piszemy $X \approx Y$. Przestrzenie homeomorficzne są nierozróżnialne pod względem własności topologicznych – pojęcie ciągłości dla nich jest takie samo, z tą różnicą, że odpowiadające punkty są nazywane inaczej w tych przestrzeniach, a homeomorfizm „tłumaczy” te nazwy między przestrzeniami. *Drogą* w przestrzeni X nazywamy ciągle przekształcenie f odcinka jednostkowego $[0, 1]$ w przestrzeń X . Przestrzeń X jest *drogowo spójna*, jeśli dla każdej pary punktów x i y w X istnieje droga f , dla której $f(0) = x$ oraz $f(1) = y$.

Niech $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ będzie rodziną rozłącznych wielokątów na płaszczyźnie o łącznej liczbie boków będącej liczbą parzystą. Każdemu z boków tych wielokątów nadajmy orientację, nazywając jeden z końców początkiem, a drugi końcem tego boku. Połączmy wreszcie wszystkie boki w pary, to znaczy wybierzmy doskonałe skojarzenie na zbiorze wszystkich boków. Taki zestaw składający się ze zbioru wielokątów $\mathcal{F}$, orientacji boków, oraz skojarzenia na bokach nazywamy *siatką*, a wielokąty F_i nazywamy *ścianami* siatki, przez analogię do siatek wielościanów. Zwracamy jednak uwagę, że w naszym rozumieniu siatka nie musi się składać do wielościanu, gdyż orientację i skojarzenie wybieramy w sposób zupełnie dowolny.

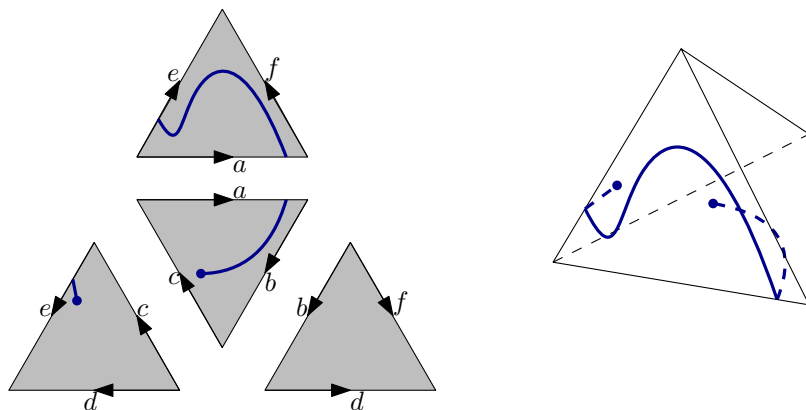
Z sumy rozłącznej ścian ustalonej siatki możemy otrzymać przestrzeń metryczną X poprzez utożsamienie ze sobą wszystkich par skojarzonych ze sobą boków, w sposób zgodny z orientacją. W ten sposób każdy punkt leżący we wnętrzu którejś ze ścian nie jest utożsamiony z żadnym innym punktem, każdy punkt leżący na boku którejś ze ścian, ale nie będący wierzchołkiem ściany jest utożsamiony z dokładnie jednym innym punktem leżącym na skojarzonym boku, a każdy punkt będący wierzchołkiem ściany może być utożsamiony z dowolną liczbą innych punktów (być może żadnym). Droga między dwoma punktami x i y w X składa się ze skończenie wielu dróg $f_1, f_2, \dots, f_k$, każdej zawartej w jednej ze ścian, gdzie początek pierwszej drogi to x , koniec ostatniej drogi to y , a koniec każdej z dróg jest utożsamiony z początkiem kolejnej (patrz Rysunek A). Najmniejsza wartość jaką może przyjąć wyrażenie $d(f_1(0), f_1(1)) + d(f_2(0), f_2(1)) + \dots + d(f_k(0), f_k(1))$, gdzie d jest odległością w metryce euklidesowej, definiuje nam odległość między punktami x a y . Łatwo przekonać się, że tak zdefiniowana odległość jest metryką.

Powierzchnią nazywamy każdą drogowo spójną przestrzeń metryczną Σ , która jest homeomorficzna z pewną przestrzenią X otrzymaną w sposób opisany powyżej.

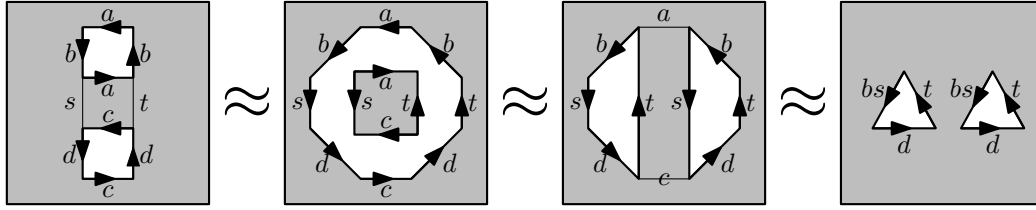
Najprostszym przykładem powierzchni jest sfera, która jest homeomorficzna z powierzchnią czworościanu. Innym przykładem jest torus, czyli powierzchnia homeomorficzna z dętką rowerową lub skórka obwarzanka. Zarówno sfera jak i torus są homeomorficzne z pewnymi podzbiorem przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$, jednak nie wszystkie powierzchnie mają tę własność. Rozpatrzmy zbiór P wszystkich prostych w $\mathbb{R}^3$ przechodzących przez środek układu współrzędnych. Kładąc jako odległość między dwoma takimi prostymi x i y kąt między nimi otrzymujemy metrykę na P , a odpowiadająca jej przestrzeń nazywana jest płaszczyzną rzutową. Jest to powierzchnia, która nie jest homeomorficzna z żadnym podzbiorem $\mathbb{R}^3$.

Zanurzenie multigrafu G w powierzchnię Σ to przyporządkowanie wierzchołkom różnych punktu na powierzchni Σ , oraz przyporządkowanie krawędziom takich dróg w Σ , że początek i koniec drogi przyporządkowanej każdej krawędzi pokrywa się z punktami przyporządkowanymi końcom tej krawędzi oraz drogi przyporządkowane różnym krawędziom są rozłączne poza końcami. Każda siatka powierzchni Σ definiuje pewien multigraf zanurzony w tą powierzchnię, gdzie wierzchołki ścian odpowiadają wierzchołkom, a boki ścian krawędziom. Na przykład siatka czworościanu definiuje zanurzenie grafu pełnego K_4 w sferę.

Z dowolnej powierzchni Σ można otrzymać nową powierzchnię modyfikując jego siatkę. Niech F będzie jedną ze ścian siatki powierzchni Σ , oraz niech T_1 i T_2 będą dwoma rozłącznymi trójkątami zawartymi w tej ścianie. Usuńmy z Σ wnętrza trójkątów T_1 i T_2 oraz zorientujmy brzegi tych trójkątów w dowolnym kierunku. Po utożsamieniu brzegów tych trójkątów zgodnie z zadanymi orientacjami otrzymamy nowe powierzchnie. Jeśli brzegi obu trójkątów były zorientowane w przeciwnych kierunkach na ścianie (to znaczy jeden zgodnie z ruchem wskazówek zegara, a drugi przeciwnie), to mówimy, że otrzymana powierzchnia Σ' powstała przez doklejenie *rączki* do Σ . Jeśli zaś brzegi były zorientowane w tym samym kierunku, to mówimy, że otrzymana powierzchnia Σ'' powstała przez doklejenie *skręconej rączki* do Σ . Zamiast dwóch trójkątów, możemy wyciąć z F wewnątrz kwadratu T . Po utożsamieniu naprzeciwległych punktów brzegu tego kwadratu otrzymujemy powierzchnię Σ''' , o której mówimy, że powstała przez doklejenie *wstęgi Möbiusa* do Σ . Z drogowej spójności łatwo wynika, że bez względu na to którą ścianę F wybierzemy, ani gdzie



RYСУNEK 37. Droga na siatce czworościanu foremego.


 RYSUNEK 38. Ciąg operacji przekształcający Σ_1 w Σ_2 .

wewnątrz F będą położone trójkąty T_1 i T_2 (lub kwadrat T), otrzymamy te same (z dokładnością do homeomorfizmu) powierzchnie Σ' , Σ'' , Σ''' .

Twierdzenie A.1. Niech Σ będzie powierzchnią. Wówczas powierzchnia Σ_1 powstała przez doklejenie dwóch wstęg Möbiusa do Σ jest homeomorficzna do powierzchni Σ_2 powstałej przez doklejenie skręconej rączki do Σ .

Dowód. Rysunek A przedstawia, jak rozcinając i sklejając ściany siatki przestrzeni Σ_1 możemy otrzymać siatkę przestrzeni Σ_2 , otrzymując w każdym kroku powierzchnię homeomorficzną do poprzedniej. $\square$

Ćwiczenie (4.2). Wykazać w analogiczny sposób, że doklejenie do powierzchni Σ wstęgi Möbiusa i rączki daje powierzchnię homeomorficzną do powierzchni otrzymanej przez doklejenie do Σ wstęgi Möbiusa i skręconej rączki.

Oznaczmy przez $\Sigma(h, c)$ powierzchnie powstałe przez dodanie do sfery h rączek oraz c wstęg Möbiusa. Z powyższego ćwiczenia wynika, że jeśli $c > 0$, to $\Sigma(h, c) \approx \Sigma(0, 2h + c)$. Wobec tego każdą powierzchnię $\Sigma(h, c)$ można otrzymać doklejając do sfery jedynie rączki lub jedynie wstęgi Möbiusa. Powierzchnię postaci $\Sigma(h, 0)$ dla $h \geq 0$ nazywamy *powierzchnią orientowalną o genusie h* , a powierzchnię postaci $\Sigma(0, c)$ dla $c > 0$ nazywamy *powierzchnią nieorientowalną o genusie c* . Okazuje się jednak, że każda powierzchnia jest homeomorficzna do powierzchni jednej z tych dwóch postaci, co wynika z następującego twierdzenia.

Twierdzenie A.2. Niech Σ będzie powierzchnią a G grafem prostym (bez wielokrotnych krawędzi i pętelek), zanurzoną w Σ i dzielącym go na f trójkątnych ścian. Niech $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$, $c = 2 - n + m - f$ oraz $h = c/2$. Wówczas $\Sigma \approx \Sigma(0, c)$ lub h jest całkowite i $\Sigma \approx \Sigma(h, 0)$.

Twierdzenie A.3. Powierzchnie $\Sigma(0, 0)$, $\Sigma(1, 0)$, $\dots$, $\Sigma(0, 1)$, $\Sigma(0, 2)$, $\dots$ są parami niehomeomorficzne.

Twierdzenia A.2 i A.3 dają nam pełną klasyfikację i pozwalają zdefiniować *genus Eulera* powierzchni homeomorficznej do $\Sigma(h, c)$ jako liczbę $2h + c$.

Wniosek A.4. Jeżeli G jest grafem zanurzoną w powierzchnię Σ o genusie Eulera g oraz zanurzenie grafu dzieli Σ na f spójnych obszarów (niekoniecznie ścian), to $n - m + f \geq 2 - g$.

Wniosek A.5. Jeżeli G jest grafem prostym zanurzoną w powierzchnię Σ o genusie Eulera g , to $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6 + 3g$.

Niech Σ będzie powierzchnią, a $T_1, \dots, T_l$ rozłącznymi trójkątami zawartymi w jej ścianach. Wówczas podprzestrzeń przestrzeni Σ otrzymaną przez usunięcie wnętrza trójkątów T_i nazywamy *powierzchnią z brzegiem*, a brzegi trójkątów T_i nazywamy *dziurami* tej powierzchni z brzegiem. Z drogowej spójności Σ wynika, że bez względu na wybór trójkątów otrzymamy tę samą (z dokładnością do homeomorfizmu) przestrzeń. Powierzchnię z brzegiem otrzymaną w wyniku usunięcia wnętrza l trójkątów z powierzchni $\Sigma(h, c)$ oznaczamy przez $\Sigma(h, c; l)$, a jej genusem Eulera nazywamy genus Eulera powierzchni $\Sigma(h, c)$, czyli liczbę $2h + c$. Łatwo przekonać się, że w powierzchni z brzegiem $\Sigma(h, c; l)$ można zanurzyć dokładnie te same grafy co w powierzchni $\Sigma(h, c)$, jednak często wierzchołki leżące na dziurach będą odgrywać szczególną rolę w grafach zaburzonych w powierzchnię z brzegiem.