Minory, dobre quasi-porządki i szerokość drzewiasta.

Modelem topologicznym grafu H w grafie G jest funkcja ϕ która przypisuje każdemu wierzchołkowi $v \in V(H)$ wierzchołek $\phi(v)$ grafu G, a każdej krawędzi $e \in E(G)$ ścieżkę $\phi(e)$ w grafie G w taki sposób, że

1. $\phi(u) \neq \phi(v)$ dla różnych wierzchołków $u, v \in V(G)$;
2. dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$, ścieżka $\phi(uv)$ ma końce w $\phi(u)$ i $\phi(v)$;
3. ścieżki $\phi(e)$ i $\phi(e')$ są rozłączne poza końcami dla dowolnych dwu różnych krawędzi $e, e' \in E(H)$.

Piszemy wtedy $H \preccurlyeq_{\text{top}} G$.

Zadanie 1.

(i) Wykazać, że jeśli $H \preccurlyeq_{\text{top}} G$, to $H \preccurlyeq G$.
(ii) Wykazać, że implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa.
(iii) Wykazać, że jeżeli każdy wierzchołek grafu H ma stopień co najwyżej 3 oraz $H \preccurlyeq G$, to $H \preccurlyeq_{\text{top}} G$.

Zadanie 2. Pokazać, że graf H jest minorem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy można otrzymać z G graf izomorficzny do H, wykonując ciąg operacji:

* usunięcie wierzchołka,
* usunięcie krawędzi,
* *kontrakcję* krawędzi, czyli ściągnięcie krawędzi łączącej dwa wierzchołki u i v do jednego wierzchołka, którego sąsiadami są te wierzchołki, które sąsiadują z u lub v.

Zadanie 3. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) Każda zamknięta na branie minorów klasa grafów $\mathcal{G}$ jest określona przez pewien skończony zbiór $\{H_1, \ldots, H_k\}$ zabronionych minorów, to znaczy taki zbiór, że $\mathcal{G}$ składa się dokładnie z takich grafów G, że żaden graf H_i nie jest minorem G.
(ii) W każdym nieskończonym zbiorze grafów można znaleźć takie dwa, że jeden jest minorem drugiego.
(iii) Istnieje przeliczalnie wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów.
(iv) Dla każdej zamkniętej na branie minorów klasy grafów problem przynależności do klasy jest rozstrzygalny.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli $\mathcal{C}$ jest klasą grafów, którą można scharakteryzować skończoną listą zabronionych minorów, to można ją scharakteryzować skończoną listą zabronionych minorów topologicznych.

Piotr Micek i Michał Seweryn

THEORETICAL COMPUTER SCIENCE Jagiellonian University

Quasi-porządkiem nazywamy relację binarną $\leqslant$ która jest zwrotna oraz przechodnia. Jeżeli dodatkowo dla każdego nieskończonego ciągu $x_0, x_1, \ldots$ w X istnieje taka para indeksów i oraz j, że $i < j$ oraz $x_i \leqslant x_j$, to mówimy, że $\leqslant$ jest *dobrym quasi-porządkiem.*

Zadanie 5. Wykazać, że quasi-porządek $\leqslant$ na X jest dobrym quasi-porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje nieskończony antyłańcuch w X ani taki nieskończony ciąg $x_0, x_1, \ldots$ w X, że dla wszystkich i zachodzi $x_{i+1} \leqslant x_i$ oraz $x_i \not\leqslant x_{i+1}$.

Zadanie 6. Wskazać nieskończoną rodzinę drzew, o tej własności, że żadne drzewo z tej rodziny nie jest izomorficzne do podgrafu żadnego innego drzewa z tej rodziny. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich drzew uporządkowana relacją bycia izomorficznym do podgrafu nie jest dobrym quasi-porządkiem.

Zadanie 7. Wskazać nieskończoną rodzinę grafów o tej własności, że dla dowolnych dwóch grafów w tej rodzinie żaden z nich nie jest minorem topologicznym drugiego. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich grafów uporządkowana relacją $\preccurlyeq_{\mathrm{top}}$ nie jest dobrym quasi-porządkiem.

Niech $\leqslant$ będzie quasi-porządkiem na zbiorze X. Dla dowolnych dwóch skończonych podzbiorów $A, B \subseteq X$, piszemy $A \leqslant B$, jeżeli istnieje taka iniekcja $f : A \to B$, że $a \leqslant f(a)$ dla wszystkich $a \in A$. W ten sposób otrzymujemy rozszerzenie quasi-porządku na zbiorze X do quasi-porządku na zbiorze $[X]^{<\omega}$ wszystkich skończonych podzbiorów X.

Zadanie 8. Wykazać, że jeżeli $\leqslant$ jest dobrym quasi-porządkiem na X, to zdefiniowane powyżej rozszerzenie na $[X]^{<\omega}$ też jest dobrym quasi-porządkiem.

Wskazówka: Założyć nie wprost, że w $[X]^{<\omega}$ istnieje ciąg $A_0, A_1, \ldots$, który nie spełnia warunku z definicji. Wybrać taki ciąg, dla którego ciąg rozmiarów $|A_0|, |A_1|, \ldots$ jest najwcześniejszy leksykograficznie. Przeanalizować ciągi $a_0, a_1, \ldots$ oraz $A_0 \setminus \{a_0\}, A_1 \setminus \{a_1\}, \ldots$, gdzie $a_n \in A_n$ są dowolne.

Mowimy, że ukorzenione drzewo T jest poddrzewem ukorzenionego drzewa T', jeżeli istnieje funkcja $\phi \colon V(T) \to V(T')$ która zachowuje relację bycia przodkiem.

Zadanie 9. Wykazać, że ukorzenione drzewa są dobrze quasi-uporządkowane relacją bycia poddrzewem

Zadanie 10. Wykazać, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\mathrm{td}(G) \geqslant \mathrm{pw}(G)+1 \geqslant \mathrm{tw}(G)+1$.

Zadanie 11. Wykazać, że ścieżki mogą mieć dowolnie dużą głębokość drzewiastą. Ile wynosi głębokość drzewiasta ścieżki na k wierzchołkach?

Zadanie 12. Wykazać, że drzewa mogą mieć dowolnie dużą szerokość ścieżkową.

Zadanie 13. Wykazać, że $\mathrm{tw}(G) \leqslant 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $K_4 \not\preccurlyeq G$.

Zadanie 14. Wykazać, że jeśli G jest grafem bez cyklu długości k, to $\mathrm{tw}(G) \leqslant k$.