Parametry związane z szerokością drzewiastą.

Podzbiór wierzchołków S w grafie G jest *zbiorem niezależnym* jeśli żadne dwa wierzchołki w S nie są połączone krawędzią. Rozmiar największego zbioru niezależnego w G oznaczamy przez $\alpha(G)$. Podzbiór wierzchołków D w grafie G jest *zbiorem dominującym* jeśli każdy wierzchołek spoza D ma sąsiada w D. Rozmiar najmniejszego zbioru dominującego w G oznaczamy przez $\beta(G)$.

Zadanie 1. Dowód twierdzenia Meyniela (patrz skrypt) pokazuje, że w każdym grafie G istnieje *spójny* zbiór dominujący o mocy co najwyżej $2\alpha(G) - 1$. Wykazać za pomocą podobnego argumentu, że każdy zbiór dominujący D w grafie G ma spójny nadzbiór D' o mocy co najwyżej $3|D| - 2$. Wywnioskować, że w każdym grafie G istnieje spójny zbiór dominujący o mocy co najwyżej $3\beta(G) - 2$.

Podzbiór wierzchołków S w grafie G jest *wysoce spójny* jeśli dla dowolnych $A, B \subseteq S$ spełniających $|A| = |B|$ istnieje $|A|$ rozłącznych A–B ścieżek. Jeżeli dodatkowo możemy wybrać te ścieżki w taki sposób, że żadna z nich nie ma wierzchołka wewnętrznego w zbiorze S, to mówimy, że S jest *zewnętrznie wysoce spójny*. Rozmiar największego zbioru wysoce spójnego w grafie G oznaczamy przez $\mathrm{wl}(G)$.

Zadanie 2. Wykazać, że zbiór wierzchołków w grafie jest wysoce spójny wtedy i tylko wtedy, gdy jest zewnętrznie wysoce spójny.

Dla dodatniej liczby całkowitej k, mówimy że zbiór wierzchołków S w grafie G jest *k-połączony* jeśli dla każdego podzbioru $X \subseteq V(G)$ o mocy mniejszej niż k, pewna składowa grafu $G - X$ zawiera więcej niż połowę wierzchołków zbioru S. Największą liczbę k dla której w grafie G istnieje zbiór k-połączony oznaczamy przez $\mathrm{link}(G)$.

Zadanie 3. Wykazać, że w każdym grafie G zachodzi

$$\mathrm{bn}(G) \leqslant \mathrm{wl}(G) \leqslant 3\,\mathrm{link}(G)$$

(razem z nierównością $\mathrm{link}(G) \leqslant \mathrm{bn}(G)$ z zadania domowego oznacza to, że parametry bn, wl, link są ze sobą związane funkcyjnie.

Zadanie 4. Wskazać jeżynę rzędu $n + 1$ w kracie $\boxplus_n$. Wywnioskować, że $\mathrm{tw}(\boxplus_n) = n$.