Strukturalna teoria grafów

Piotr Micek i Michał Seweryn

Splątania

Zadanie 1. Wykazać, że dla dowolnych separacji (A, B) i (C, D) grafu G zachodzi

$$\operatorname{ord}(A \cap C, B \cup D) + \operatorname{ord}(A \cap C, B \cup D) = \operatorname{ord}(A, B) + \operatorname{ord}(C, D).$$

Przypomnijmy, że separacja (A, B) jest k-separacją jeśli $|V(A) \cap V(B)| \leqslant k$

Zadanie 2. Niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem rzędu $k \geqslant 1$ grafu G oraz niech (A, B) i (A', B') będą dwoma $(k-1)$-separacjami grafu G. Wykazać, że

(1) jeśli $|V(A)| < k$, to $(A, B) \in \mathcal{T}$;
(2) jeśli $(A, B) \in \mathcal{T}$ oraz $B \subseteq B'$, to $(A', B') \in \mathcal{T}$;
(3) jeśli $(A, B), (A', B') \in \mathcal{T}$ oraz $\operatorname{ord}(A \cup A', B \cap B') < k$, to $(A \cup A', B \cap B') \in \mathcal{T}$.
(4) jeśli $k \geqslant 2$ oraz separacje (A, B) i (A', B') różnią się jedynie na wierzchołkach izolowanych w G, to $(A, B) \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy gdy $(A', B') \in \mathcal{T}$;
(5) jeśli $k \geqslant 3$ oraz $V(A) = V(A')$ i $V(B) = V(B')$, to $(A, B) \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(A', B') \in \mathcal{T}$;

Maliną w grafie G nazywamy taką rodzinę spójnych podzbiorów wierzchołków, że dla dowolnych trzech X_1, X_2, X_3 z nich, mamy $X_1 \cap X_2 \cap X_3 \neq \emptyset$ lub istnieje taka krawędź, że każdy ze zbiorów X_1, X_2, X_3 zawiera co najmniej jeden koniec tej krawędzi. *Rzędem* maliny nazywamy moc najmniejszego zbioru mającego niepuste przecięcie ze wszystkimi jej elementami. Z zadania domowego wynika, że maksymalny rząd maliny w grafie jest równy maksymalnemu rzędowi splątania w grafie.

Zadanie 3. Niech $\operatorname{tn}(G)$ oznacza maksymalny rząd splątania w grafie G, a $\operatorname{bn}(G)$ maksymalny rząd jeżyny w G. Wykazać, że

$$\operatorname{tn}(G) \leqslant \operatorname{bn}(G) \leqslant 2 \operatorname{tn}(G).$$

Wskazówka. Skorzystać z zadania domowego o malinach.

Zadanie 4. Niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem w grafie G, niech κ będzie funkcją rangi dla $\mathcal{T}$ i niech X i I będą takimi podzbiorami wierzchołków, że I jest niezależny w $\mathcal{T}$. Wykazać, że każda rodzina rozłącznych X–I ścieżek w G ma moc co najwyżej $2\kappa(X)$.