Strukturalna teoria grafów

Piotr Micek i Michał Seweryn

Zestaw 3
Semestr letni 2019/2020
Kraków, 4 czerwca 2020

Twierdzenie o kracie

Zadanie 1. Dwie jeżyny $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ grafu G są *rozróżnialne*, jeżeli istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| < \min\{\mathrm{ord}(\mathcal{B}_1), \mathrm{ord}(\mathcal{B}_2)\}$ oraz istnieją elementy $B_1 \in \mathcal{B}_1$ oraz $B_2 \in \mathcal{B}_2$ leżące w różnych składowych grafu $G - X$.

Niech C będzie cyklem na n wierzchołkach, a P_1, P_2, P_3 takimi wierzchołkowo rozłącznymi ścieżkami w C, że $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) = V(C)$. Wówczas $\{V(P_1), V(P_2), V(P_3)\}$ jest jeżyną w C. Wykazać, że wszystkie jeżyny tej postaci są parami rozróżnialne, a więc C ma co najmniej $\binom{n}{3}$ parami rozróżnialnych jeżyn.

Zadanie 2. Wykazać, że dla każdego grafu planarnego H istnieje taka dodatnia liczba całkowita n, że krata $\boxplus_n$ ma minor izomorficzny z H.

Wskazówka: Udowodnić, że każdy graf planarny jest minorem pewnego hamiltonowskiego grafu planarnego a następnie że każdy hamiltonowski graf planarny jest minorem pewnej kraty.

Zadanie 3. Niech G będzie grafem, a $\mathcal{T}$ splątaniem w G. Model ϕ grafu H w G jest *kontrolowany* przez $\mathcal{T}$, jeśli każdemu wierzchołkowi $h \in V(H)$ możemy przypisać reprezentanta $v_h \in V(\phi(h))$ tak aby zbiór $\{v_h \mid h \in V(H)\}$ był $\mathcal{T}$-niezależny.

Wykazać, że model ϕ grafu H jest kontrolowany przez splątanie $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $(|V(H)| - 1)$-separacji $(A, B) \in \mathcal{T}$ oraz każdego wierzchołka $h \in V(H)$ mamy $V(\phi(h)) \setminus V(A) \neq \emptyset$.