THEORETICAL COMPUTER SCIENCE
Jagiellonian University

Własność Erdősa-Pósy i rozłączne transwersalne ścieżki

Twierdzenie. Jeśli X, Y i T są takimi podzbiorami wierzchołków w grafie G, że $\kappa(X,T) < \kappa(Y,T)$, to istnieje $y \in Y$, że $\kappa(X \cup \{y\}, T) > \kappa(X,T)$.

Zadanie 1. Niech S i T będą podzbiorami wierzchołków grafu G i niech $\mathcal{S}$ będzie podziałem zbioru S. Niech μ oznacza maksymalną liczbę takich rozłącznych ścieżek w G, że każda z nich ma końce w S i w T a ponadto końce tych ścieżek są zawarte w różnych elementach $\mathcal{S}$. Wykazać, że istnieje taki podział $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, że $|\mathcal{S}_1| \leqslant \mu$ i $\kappa(\bigcup \mathcal{S}_2, T) \leqslant \mu$.

Wskazówka. Niech $\mathcal{S}_1$ będzie maksymalną podrodziną $\mathcal{S}$ o tej własności, że istnieje $|\mathcal{S}_1|$ rozłącznych ścieżek łączących T z elementami różnych zbiorów z $\mathcal{S}_1$.

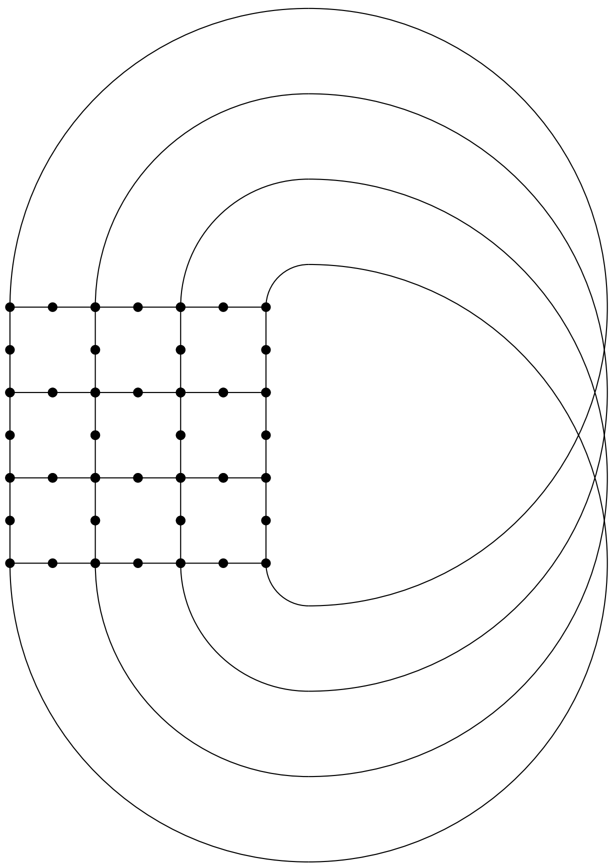
Zadanie 2. Oznaczmy przez G_n graf otrzymany z kraty $\boxplus_n$ przez dodanie krawędzi między wierzchołkami $(1,j)$ a $(n, n+1-j)$ dla wszystkich $i \in \{1,\dots,n\}$. Niech G_n^+ będzie grafem otrzymanym z G_n przez dodanie nowego wierzchołka na każdej krawędzi ze zbioru $E(\boxplus_n)$ (dokonujemy 1-subdywizji tych krawędzi), patrz rysunek 1.

1. Wykazać, że G_n^+ nie zawiera dwóch rozłącznych nieparzystych cykli.
2. Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej k istnieje dodatnia liczba całkowita n, że nie istnieje podzbiór $X \subseteq V(G)$ o mocy co najwyżej k, że $G_n^+ - X$ nie ma żadnych nieparzystych cykli.

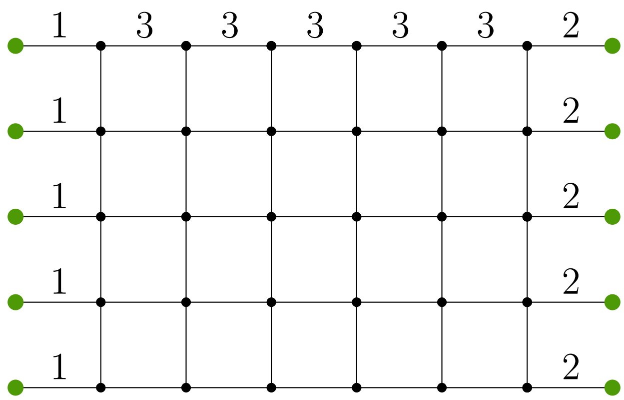
Wywnioskować, że nieparzyste cykle nie mają własności Erdősa-Pósy.

Zadanie 3. Wykazać, że dla każdej liczby złożonej $m \geqslant 6$, A-ścieżki o długościach podzielnych przez m nie mają własności Erdősa-Pósy.

Wskazówka. Patrz rysunek 2.



Rysunek 1: Graf G_4^+.



Rysunek 2: Krawędzie bez etykiety mają domyślnie etykietę 6.