

STRUKTURALNA TEORIA GRAFÓW

PIOTR MICEK I MICHAŁ SEWERYN

STRESZCZENIE. Notatki do wykładów w ramach kursu *Strukturalna teoria grafów* prowadzonego w semestrze letnim 2019/2020 na Uniwersytecie Jagiellońskim. To jest druga edycja kursu¹.

SPIS TREŚCI

Wstęp	3
1. Wprowadzenie do minorów	3
2. „Jakościowe” twierdzenia strukturalne	9
3. Gęstość i liczba chromatyczna grafów bez K_r -minoru	13
4. Grafy bez ustalonego drzewa jako minoru	19
5. Parametry związane z szerokością drzewiastą	23
6. Splątania	28
7. Twierdzenie o kracie	35
8. Twierdzenie Gallai i własność Erdősa-Pósy	38
9. Problem PLANAR VERTEX DELETION: technika nieistotnego wierzchołka	48
10. Grafy planarne	54
11. Powierzchnie	59
12. Zanurzenia w powierzchni kombinatoryczne	61

(P. Micek, M. Seweryn) INSTYTUT INFORMATYKI ANALITYCZNEJ, WYDZIAŁ MATEMATYKI I INFORMATYKI, UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI

E-mail address: piotr.micek@tcs.uj.edu.pl, m.seweryn@student.uj.edu.pl.

Date: 24 września 2020 godz. 17:35.

¹Notatki z pierwszej edycji są [tutaj](#).

- | | | |
|-----|-------------------------------|----|
| 13. | Minimalne niezanurzalne grafy | 63 |
| 14. | Dobre quasi-porządki | 65 |

WSTĘP

strona kursu: <https://piotrmiczek.staff.tcs.uj.edu.pl/strukturalna/>

źródła, materiały:

- pierwsza edycja kursu była wzorowana na kursie Jima Geelena *Introduction to Graph Minors* wykładanym na Uniwersytecie w Waterloo na jesieni 2016; nagrania 24 wykładów dostępne są na jego [stronie](#);
- krótkie ale jakże pojemne [notatki](#) Sergieja Norina napisane dla kursu *Graph Minor Theory* prowadzonego na Uniwersytecie McGill w Montrealu w 2017 r.;
- dodatek o powierzchniach powstał w oparciu o książkę Bojana Mohara i Carstena Thomassena *Graphs on Surfaces*;
- [praca przeglądowa](#) Ken-ichiego Kawarabayashiego i Bojana Mohara *Some recent progress and applications in graph minor theory*
- rozdział *Graph Minors* w książce Reinharda Diestela *Graph Theory* jest powszechnie uważany za najlepsze wprowadzenie do strukturalnej teorii grafów; książka jest dostępna [tutaj](#).

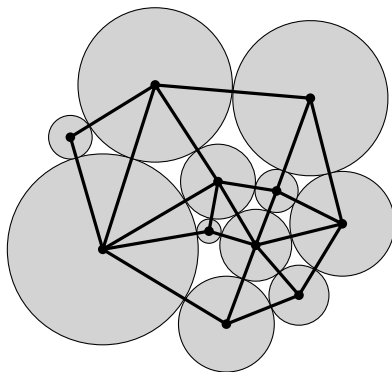
1. WPROWADZENIE DO MINORÓW

Grafy planarne są obiektem intensywne badań jeszcze od czasów, gdy nie można było mówić o teorii grafów. Hipoteza o czterech barwach była motorem napędowym badań pokoleń matematyków także po 1976 r., czyli po odkryciu pierwszego komputerowo wspomaganego dowodu hipotezy. Charakteryzacje grafów planarnych w terminach zabronionych minorów, to być może pierwsze twierdzenia budujące dzisiejszą teorię minorów w grafach; zaskakująco głęboki wycinek kombinatoryki z wieloma powiązaniem w matematyce i informatyce. Jednym z naturalnych uogólnień twierdzenia o czterech barwach jest hipoteza Hadwiger, która jest powszechnie uważana za jeden z najważniejszych otwartych problemów w teorii grafów.

Zacznijmy jednak od początku. Mówimy, że graf jest *zanurzony w płaszczyznę*, jeśli jego wierzchołkami są różne punkty płaszczyzny, każda krawędź grafu jest krzywą² na płaszczyźnie między punktami będącymi końcami tej krawędzi i wewnątrz żadnej krawędzi nie zawiera żadnego wierzchołka grafu ani nie przecina żadnej innej krawędzi. *Grafem planarnym* nazywamy graf, który jest izomorficzny z pewnym grafem zanurzonym w płaszczyznę.

Grafy planarne mają wiele ciekawych i głębokich własności. Dla przykładu, twierdzenie Koebe (ang. *circle packing theorem*) mówi, że każdy graf planarny jest grafem styczności pewnej rodziny kół na płaszczyźnie, patrz Rysunek 1. Z takiej reprezentacji natychmiast wynika, że każdy graf planarny ma zanurzenie w płaszczyznę takie, że wszystkie krawędzie są odcinkami.

²Tutaj przez *krzywą* rozumiemy homeomorficzny obraz przedziału domkniętego $[0, 1]$. Jeśli krzywa e jest obrazem przedziału $[0, 1]$ przez homeomorfizm $f: [0, 1] \rightarrow e$, to mówimy, że krzywa e jest *między* punktami $f(0)$ a $f(1)$, a jej *wnętrzem* nazywamy obraz $f((0, 1))$ przedziału otwartego $(0, 1)$.



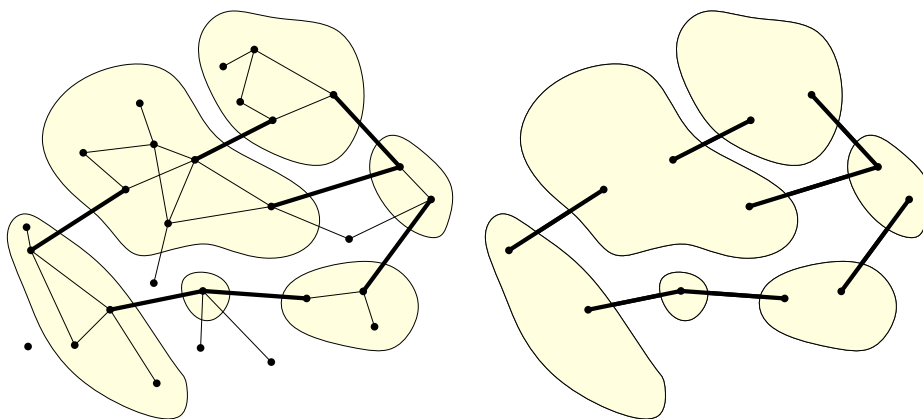
RYSUNEK 1. Graf planarny i jego reprezentacja jako graf styczności rodziny kół.

Aby uzasadnić, że rozważany graf jest planarny, najłatwiej po prostu go narysować na płaszczyźnie. Jak uzasadnić, że rozważany graf *nie* jest planarny? Okazuje się, że jeśli wypracujemy odpowiednie pojęcie podstruktury w grafie to istnieją jedynie dwie przeszkody dla planarności. W ten sposób dochodzimy do kluczowych definicji dla tego kursu.

Modelem grafu H w grafie G jest funkcja ϕ przyporządkowująca każdemu wierzchołkowi $v \in V(H)$ spójny podgraf $\phi(v)$ grafu G , a każdej krawędzi $e \in E(H)$ krawędź $\phi(e) \in E(G)$ w taki sposób, że

- (i) $V(\phi(u)) \cap V(\phi(v)) = \emptyset$ dla różnych $u, v \in V(H)$;
- (ii) dla każdej krawędzi uv grafu H , krawędź $\phi(uv)$ ma końce w $V(\phi(u))$ i $V(\phi(v))$.

Graf H jest *minorem* grafu G , jeśli G ma model H . Piszemy wtedy $H \preceq G$.



RYSUNEK 2. Wizualizacja modelu minoru w grafie. Po lewej żółte obszary odpowiadają podgrafom $\phi(v)$ grafu G dla $v \in V(H)$. Po prawej żółte obszary to wierzchołki grafu H .

Ćwiczenie. Wykazać, że graf H jest minorem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy możemy otrzymać graf izomorficzny do H rozpoczynając od G i wykonując ciąg operacji:

- (i) usunięcie wierzchołka;
- (ii) usunięcie krawędzi;
- (iii) *kontrakcja* krawędzi, czyli ściągnięcie krawędzi łączącej dwa wierzchołki u i v do jednego wierzchołka, którego sąsiadami są te wierzchołki, które sąsiadują z u lub v .

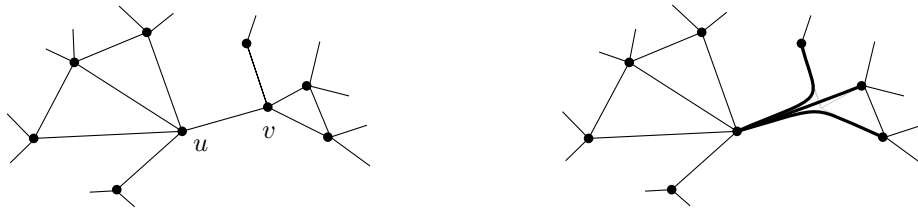
Wspomniane dwie przeszkody dla planarności grafu to minor K_5 i minor $K_{3,3}$.

Twierdzenie 1.1 (Kuratowski 1930; Wagner 1937). *Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera K_5 ani $K_{3,3}$ jako minoru.*

Grafy planarne to nie jedyna naturalna klasa grafów scharakteryzowana w terminach zabronionych minorów. Graf G jest *lasem*, jeśli nie zawiera cyklu jako podgrafu. Łatwo widać, że G jest lasem wtedy i tylko, gdy $K_3 \not\leq G$. Graf G jest *zewnątrznie planarny*, jeśli G ma takie zanurzenie w płaszczyznę, że wszystkie wierzchołki G leżą na jednej (zewnątrznej) ścianie³. Okazuje się, że G jest zewnętrze planarny wtedy i tylko, gdy $K_{2,3} \not\leq G$ i $K_4 \not\leq G$. Kolejny przykład to grafy bez ścieżki na k wierzchołkach, jako podgrafu. Łatwo widać, że $P_k \not\leq G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_k \not\leq G$.

Klasa grafów \mathcal{G} jest *zamknięta na branie minorów*, jeżeli dla każdego $G \in \mathcal{G}$ wszystkie minory grafu G należą do \mathcal{G} .

Zauważmy, że wszystkie rozważane powyżej klasy grafów są zamknięte na branie minorów. Dla przykładu przyjrzyjmy się grafom planarnym: jeśli G ma zanurzenie w płaszczyznę to w oczywisty sposób po usunięciu dowolnego wierzchołka lub krawędzi powstały graf wciąż ma zanurzenie w płaszczyznę; jeśli zaś skontraktujemy krawędź to możemy otrzymać zanurzenie nowego grafu modyfikując zanurzenie wyjściowego grafu, patrz Rysunek 3.



RYSUNEK 3. Po lewej: zanurzenie grafu w płaszczyznę. Po prawej: zanurzenie grafu otrzymanego po kontrakcji krawędzi uv . Nowy wierzchołek narysowany jest na miejscu wierzchołka u .

Okazuje się, że wszystkie wymienione charakteryzacje są szczególnymi przypadkami głębokiego twierdzenia—otóż każda klasa zamknięta na branie minorów ma skończoną listę grafów, które ją charakteryzują w terminach zabronionych minorów.

Twierdzenie 1.2 (Robertsona-Seymoura). *Dla każdej klasy \mathcal{G} zamkniętej na branie minorów istnieje skończony zbiór grafów $\{H_1, \dots, H_k\}$ o tej własności, że \mathcal{G} składa się dokładnie z tych grafów, dla których żaden z H_1, \dots, H_k nie jest minorem.*

³Pojęcie ściany zostanie sformalizowane w rozdziale 11 o grafach na powierzchniach.

Dla dowolnej klasy \mathcal{G} zamkniętej na branie minorów, możemy rozważyć najmniejszy zbiór $\{H_1, \dots, H_k\}$ zabronionych minorów który charakteryzuje klasę \mathcal{G} . Zbiór ten jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu grafów i oznaczamy go przez $\text{Forb}(\mathcal{G})$. Zatem zbiór $\text{Forb}(\mathcal{G})$ jest maksymalną rodziną takich nieizomorficznych grafów H , że H nie należy do \mathcal{G} , ale każdy właściwy minor grafu H należy do \mathcal{G} .

Zanim Robertson i Seymour udowodnili swoje twierdzenie, było ono znane jako hipoteza Wagnera. W literaturze możemy znaleźć kilka równoważnych wypowiedzi tego wyniku.

Ćwiczenie. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- (i) Każda zamknięta na branie minorów klasa grafów \mathcal{G} jest określona przez pewien skończony zbiór $\{H_1, \dots, H_k\}$ zabronionych minorów, to znaczy taki zbiór, że \mathcal{G} składa się dokładnie z takich grafów G , że żaden graf H_i nie jest minorem G .
- (ii) Z każdego nieskończonego zbioru grafów da się wybrać dwa takie, że jeden jest minorem drugiego.
- (iii) Istnieje przeliczalnie wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów.
- (iv) Dla każdej zamkniętej na branie minorów klasy grafów problem przynależności do klasy jest rozstrzygalny.

Neil Robertson i Paul Seymour przedstawili dowód twierdzenia 1.2 w serii prac zatytułowanej *Graph Minors* publikowanych w latach 1983-2011. Seria ta składa się z ponad 20 prac obejmujących łącznie prawie 750 stron.

Dla dowolnej klasy grafów \mathcal{G} zamkniętej na branie minorów możemy rozważyć problem decyzyjny przynależności podanego na wejściu grafu do \mathcal{G} . Z twierdzenia 1.2 wiemy, że rozwiązanie tego problemu sprowadza się do rozwiązania:

Problem H -MINOR-TESTING.

Wejście: graf G

Wyjście: TAK, jeśli H jest minorem G , NIE w przeciwnym przypadku.

Robertson i Seymour opracowali algorytm, który dla ustalonego grafu H rozwiązuje H -MINOR-TESTING w czasie $O(n^3)$. Pod koniec 2016 roku Bruce Reed ogłosił istnienie algorytmu działającego w czasie $O(n)$.

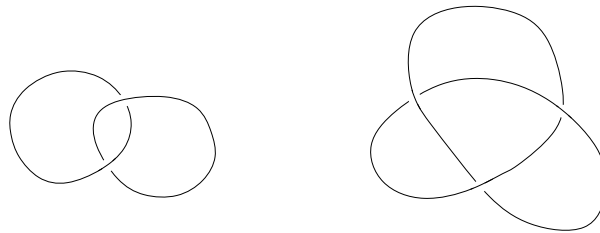
Przyjrzyjmy się teraz przykładom klas grafów zamkniętych na branie minorów.

Jeden sposób w jaki możemy zdefiniować takie klasy, to przez pewne zabronione podstruktury, które możemy wyrazić w terminach zabronionych minorów. Przykładowo, klasycznie las jest definiowany jako graf, który nie zawiera cyklu jako podgrafu. Jednakże, jak już wspomnieliśmy, jest to równoważne temu, że graf nie zawiera cyklu C_3 jako minor. Podobnie, klasę grafów niezawierających ścieżki na k wierzchołkach (w sensie podgrafu) można zdefiniować jako klasę grafów bez P_k -minoru. Klasa grafów bez k rozłącznych cykli to klasa grafów zdefiniowana przez zabronienie grafu

składającego się z k rozłącznych trójkątów jako minoru. Klasa grafów bez cykli długości większej niż k to klasa grafów zdefiniowana przez zabronienie C_{k+1} jako minoru. Klasa grafów o co najwyżej k wierzchołkach to klasa zdefiniowana przez zabronienie $\overline{K_{k+1}}$ jako minoru.

Wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów można zdefiniować topologicznie. Grafy planarne to te grafy, które można zanurzyć w płaszczyźnie. Zgodnie z twierdzeniem Wagnera, dla klasy grafów planarnych mamy dwa zabronione minory: K_5 i $K_{3,3}$. Ogólniej, dla dowolnej zwartej dwuwymiarowej rozmaitości topologicznej, czyli powierzchni⁴, grafy zanurzalne w nią tworzą klasę zamkniętą na branie minorów. Dla płaszczyzny rzutowej lista zabronionych minorów składa się z 35 grafów, a dla torusa nie jest znana pełna lista zabronionych minorów, wiadomo, że jest ich co najmniej 16 tysięcy. Grafy zewnętrznie planarne można scharakteryzować jako te, które da się tak zanurzyć w dysku, aby wszystkie wierzchołki leżały na brzegu. Ponownie, możemy ten przykład uogólnić do dowolnej dwuwymiarowej rozmaitości topologicznej z brzegiem i klasa grafów zanurzalnych w tę rozmaitość ze wszystkimi wierzchołkami na brzegu utworzy nam klasę zamkniętą na branie minorów.

Łatwo przekonać się, że w przestrzeń trójwymiarową da się zanurzyć wszystkie grafy. Możemy jednak otrzymać ciekawe klasy grafów, gdy będziemy rozważać jedynie takie grafy, które da się tak zanurzyć w przestrzeń trójwymiarową, by był spełniony pewien dodatkowy warunek. Jeżeli będziemy wymagać, by w zanurzeniu żadne dwa cykle nie były połączone tak jak dwa kolejne ogniwa w łańcuchu, to otrzymamy klasę zamkniętą na branie minorów (ang. *linklessly embeddable graphs*). Klasa ta może być scharakteryzowana za pomocą listy siedmiu zabronionych minorów. Podobnie, jeśli rozważymy klasę grafów która da się tak zanurzyć w przestrzeń, aby żaden cykl nie tworzył węzła, to również otrzymamy klasę zamkniętą na branie minorów (ang. *knotlessly embeddable graphs*). Nie jest znany algorytm, który rozstrzyga, czy graf należy do tej klasy. Jednak na mocy twierdzenia Robertsona-Seymoura wiemy, że taki algorytm istnieje. Nie jesteśmy jednak w stanie skonstruować tego algorytmu i nawet, gdybyśmy mieli taki algorytm, to nie umielibyśmy o nim pokazać że jest prawidłowy!



RYSUNEK 4. Zabronione struktury w linklessly embeddable graphs (dwa połączone cykle) i w knotlessly embeddable graphs (węzeł).

Możemy również definiować klasy zamknięte na branie minorów strukturalnie, rozważając grafy dla których pewien parametr jest ograniczony. Parametrem, który jest dla nas szczególnie ważny jest szerokość drzewiasta. Nieformalnie, szerokość

⁴Patrz rozdział 11

drzewiasta grafu opisuje jak bardzo ten graf przypomina drzewo — im mniejsza szerokość drzewiasta, tym większe podobieństwo do drzewa. *Szerokość drzewiasta* $tw(G)$ (ang. *treewidth*) grafu G to najmniejsza taka liczba k , że istnieje drzewo T oraz rodzina $\{T_u : u \in V(G)\}$ poddrzew drzewa T o tej własności, że

- (i) dla każdej krawędzi uv grafu G drzewa T_u i T_v się przecinają oraz
- (ii) każdy wierzchołek drzewa T należy do co najwyżej $k + 1$ poddrzew T_u .

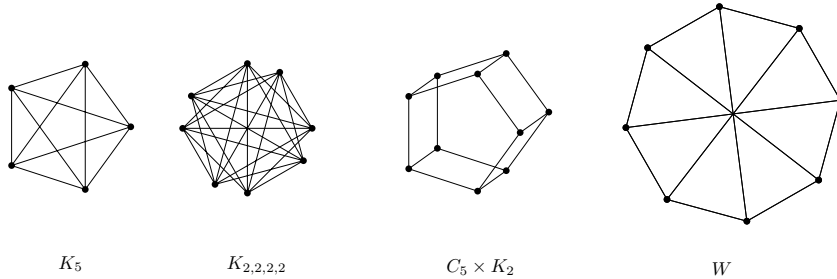
Dla T oraz $\{T_u : u \in V(G)\}$ jak wyżej możemy rozważyć rodzinę $\mathcal{B} = \{B_t : t \in V(T)\}$, gdzie dla każdego węzła $t \in V(T)$, $B_t = \{u \in V(G) : t \in V(T_u)\}$. Wówczas spełnione są warunki:

- (T1) $\bigcup_{t \in V(T)} B_t = V(G)$,
- (T2) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $t \in V(T)$ o tej własności, że $u, v \in B_t$,
- (T3) dla dowolnych węzłów $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$, jeżeli t_2 leży na ścieżce między węzłami t_1 i t_3 w T , to $B_{t_1} \cap B_{t_3} \subseteq B_{t_2}$.

Dekompozycją drzewiastą grafu G nazywamy dowolną parę (T, \mathcal{B}) , spełniającą warunki (T1)–(T3). *Szerokością* dekompozycji (T, \mathcal{B}) nazywamy wartość $\max_{t \in V(T)} |B_t| - 1$. Szerokość drzewiastą grafu G można równoważnie zdefiniować jako najmniejszą szerokość dekompozycji drzewiastej tego grafu. Zbiory B_t nazywamy *workami* dekompozycji.

Ćwiczenie. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej k , liczby o szerokości drzewiastej co najwyżej k tworzą klasę zamkniętą na branie minorów.

Rozważmy klasę wszystkich grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej k . Dla $k = 1$ zabroniony minor to K_3 , dla $k = 2$ zabroniony minor to K_4 . Dla $k = 3$ lista zabronionych minorów liczy 4 grafy (patrz Rysunek 1).



RYSUNEK 5. Zabronione minory dla grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej 3.

Możemy też otrzymywać nowe klasy zamknięte na branie minorów z innych za pomocą konstrukcji. Dla dowolnej klasy grafów \mathcal{G} oraz nieujemnej liczby całkowitej, niech \mathcal{G}^{+k} oznacza klasę wszystkich grafów G o tej własności, że po usunięciu pewnych co najwyżej k wierzchołków z G można otrzymać graf z klasy \mathcal{G} .

Ćwiczenie. Wykazać, że jeżeli \mathcal{G} jest zamknięta na branie minorów, to \mathcal{G}^{+k} również jest zamknięta na branie minorów.

Przykładowo, jeżeli \mathcal{G} jest klasą grafów planarnych, to \mathcal{G}^{+1} to tak zwane *grafy apeksowe* (ang. *apex graphs*) czyli klasa takich grafów, z których można otrzymać graf planarny przez usunięcie co najwyżej jednego wierzchołka. Jeżeli zaś \mathcal{G} jest klasą lasów, to \mathcal{G}^{+k} jest klasą grafów dla których istnieje zbiór rozrywający cykle (ang. *feedback vertex set*) mocy co najwyżej k . Inną operacją pozwalającą na otrzymanie nowej klasy zamkniętej na branie minorów z innej jest domknięcie na sumy klikowe. Jeśli G_1 i G_2 są takimi dwoma grafami, że ich przecięcie $K = G_1 \cap G_2$ jest wspólną kliką tych grafów oraz niech $F \subseteq E(K)$, to graf $(G_1 \cup G_2) - F$ nazywamy *sumą klikową* (ang. *clique-sum*) grafów G_1 i G_2 . Dla dowolnej klasy grafów \mathcal{G} , jego *domknięciem na sumy klikowe* nazywamy zbiór wszystkich grafów, które możemy otrzymać z grafów w klasie \mathcal{G} za pomocą wielokrotnych operacji sumy klikowej.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeżeli \mathcal{G} jest zamknięta na branie minorów, to jej domknięcie na sumy klikowe również jest zamknięte na branie minorów.

Przykładowo, domknięcie klasy wszystkich grafów o mocy co najwyżej $k + 1$ na sumy klikowe jest klasą wszystkich grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej k .

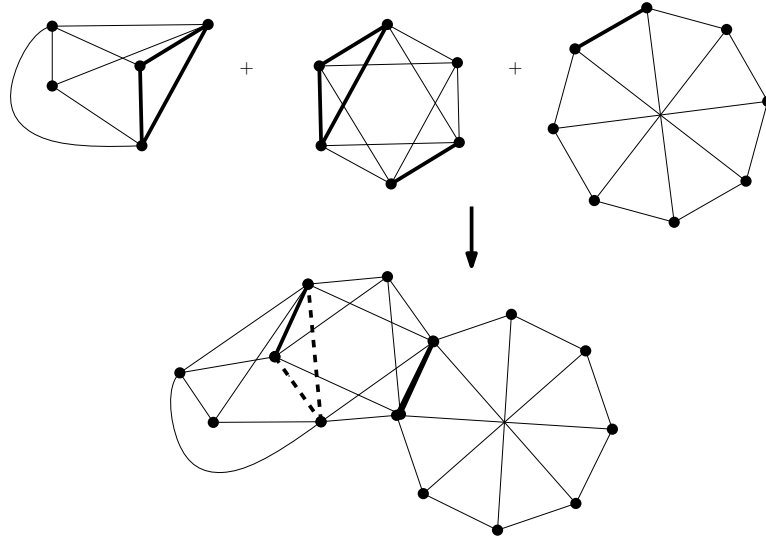
2. „JAKOŚCIOWE” TWIERDZENIA STRUKTURALNE

Głównym narzędziem użytym przez Robertsona i Seymoura w dowodzie ich twierdzenia jest tak zwane twierdzenie o strukturze grafów (ang. *graph structure theorem*). Twierdzenie o strukturze grafów jest najważniejszym owocem prac Robertsona i Seymoura mającym liczne zastosowania w kombinatoryce i algorytmice. Charakteryzuje ono klasy grafów bez pewnego K_n -minoru jako te, dla których istnieje powierzchnia, że wszystkie grafy w klasie można otrzymać lekko modyfikując zanurzenia grafów w tę powierzchnię. Wypowiedź tego twierdzenia jest dość techniczna i podamy ją później, gdy poznamy wszystkie pojęcia potrzebne do sformułowania jej.

Dla wszystkich n nie większych niż 5 znamy charakteryzacje grafów bez K_n -minoru, które opisują prostą strukturę takich grafów. Grafy bez K_3 -minoru to po prostu lasy, grafy bez K_4 -minoru to grafy o szerokości drzewiastej co najwyżej 2. Grafy bez K_5 -minoru to grafy, które można otrzymać za pomocą sum klikowych dowolonej liczby grafów planarnych oraz kopii grafu Wagnera (patrz rysunek 6). To są jednak szczególne przypadki, a dla $n \geq 6$ nie znamy dokładnej charakteryzacji grafów bez K_n -minoru.

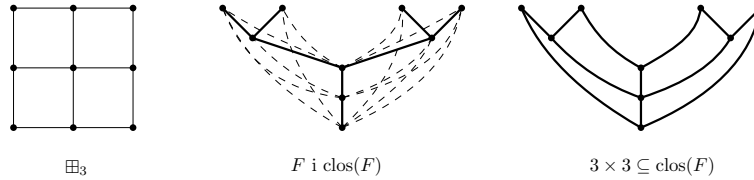
Twierdzenie o strukturze grafów nie daje nam pełnej charakteryzacji grafów bez K_n -minoru, a zamiast tego podaje charakteryzację *klas* grafów w których nie znajdziemy dowolnie dużych klik jako minorów. Jest to więc przykład „jakościowego” twierdzenia strukturalnego. Poniżej podamy kilka przykładów jakościowych twierdzeń strukturalnych.

Jako najprostszy przykład rozważmy nie grafy bez dużych klik jako minorów a bez długich ścieżek jako minorów. Strukturę takich grafów można opisać w terminach parametru zwanego głębokością drzewiastą.



RYSUNEK 6. Sklejenie dwu triangulacji i grafu Wagnera.

Ukorzonym lasem nazywamy sumę rozłącznych ukorzonych drzew. Wysokością ukorzonego lasu F nazywamy maksymalną liczbę wierzchołków na ścieżce od korzenia do liścia w F . Domknięcie $\text{clos}(F)$ ukorzonego lasu F , to graf powstały przez dodanie w F krawędzi łączących każdy wierzchołek z wszystkimi jego przodkami. Głębokość drzewiasta (ang. *treedepth*) grafu G , oznaczana $\text{td}(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje ukorzony las F o wysokości k taki, że $G \subseteq \text{clos}(F)$.

RYSUNEK 7. Krata \boxplus_3 zanurzona w domknięciu drzewa wysokości 5.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeśli $H \preceq G$, to $\text{td}(H) \leq \text{td}(G)$. Zatem klasa grafów o głębokości drzewiastej co najwyżej k jest zamknięta na branie minorów.

Ćwiczenie. Wykazać, że ścieżki mają dowolnie dużą głębokość drzewiastą.

Nieformalnie, strukturalne twierdzenie dla ścieżek mówi, że graf zawiera długą ścieżkę wtedy i tylko wtedy gdy ma dużą głębokość drzewiastą. Formalna wypowiedź jest następująca.

Twierdzenie 2.1. Dla każdej klasy grafów \mathcal{C} następujące warunki są równoważne:

- (i) istnieje $k \in \mathbb{N}$, że żaden graf w \mathcal{C} nie zawiera ścieżki P_k jako minoru,
- (ii) istnieje $d \in \mathbb{N}$, że $\text{td}(G) \leq d$ dla każdego $G \in \mathcal{C}$.

Dowód. Dla dowodu implikacji (i) \Rightarrow (ii), załóżmy, że P_k nie jest minorem żadnego grafu w \mathcal{C} i niech $G \in \mathcal{C}$. Niech F będzie dowolnym ukorzonym lasem DFS grafu G . Wtedy wysokość F to co najwyżej $k - 1$ bo każda ścieżka od korzenia do liścia

w F jest ścieżką w G . Zauważmy, że $G \subseteq \text{clos}(F)$ bo każda krawędź grafu G łączy przodka z potomkiem w lesie DFS. Zatem $\text{td}(G) \leq k - 1$, co kończy dowód pierwszej implikacji.

Implikacja (ii) \Rightarrow (i) wynika z faktu, że ścieżki mają nieograniczoną głębokość drzewiastą, którego dowód zostawiliśmy jako ćwiczenie. \square

Kolejny przykład dotyczy grafów, które nie zawierają wielu rozłącznych cykli (jako podgrafów). Dla ustalonego k , jaką strukturę mają grafy bez k rozłącznych cykli? Zwracamy uwagę, że graf nie zawiera k rozłącznych cykli wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera on minoru $k \times C_3$ (to jest k rozłącznych kopii 3-cyklu). Zauważmy, że jeśli z grafu można usunąć mniej niż k wierzchołków tak aby pozostałe wierzchołki indukowały las, to graf ten nie zawiera k rozłącznych cykli, gdyż każdy cykl w grafie musi zawierać któryś z usuniętych wierzchołków. Okazuje się, że jeśli graf nie zawiera wielu rozłącznych cykli, to zawsze można z niego otrzymać las usuwając „niewielki” zbiór wierzchołków. Mówi o tym następujące powszechnie znane twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 (Erdős-Pósa, 1965). *Istnieje funkcja $f(k) = O(k \log k)$ taka, że dla każdego $k \geq 1$ i każdego grafu G zachodzi:*

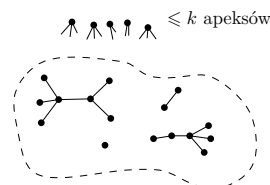
- (i) G ma k rozłącznych cykli lub
- (ii) istnieje podzbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| < f(k)$ oraz $G - X$ nie ma żadnych cykli (jest lasem).

Funkcja $O(k \log k)$ w powyższym twierdzeniu jest najlepsza możliwa. Twierdzenie to udowodnimy przy okazji dowodu twierdzenia o kracie, z gorszą złożonością funkcji f . Nawet z tą gorszą funkcją możemy wywnioskować następujące strukturalne twierdzenie dla grafów bez wielu rozłącznych cykli.

Wniosek 2.3. *Dla każdej klasy grafów \mathcal{C} następujące warunki są równoważne:*

- (i) istnieje $k \in \mathbb{N}$, że żaden graf w \mathcal{C} nie zawiera k rozłącznych cykli,
- (ii) istnieje $m \in \mathbb{N}$, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ istnieje taki zbiór wierzchołków X , że $|X| < m$ oraz $G - X$ jest lasem.

Nieformalnie więc, graf nie zawiera wielu rozłącznych cykli wtedy i tylko wtedy gdy ma on mały zbiór rozrywający wszystkie cykle.



RYSUNEK 8. Graf z klasy \mathcal{H}_k .

Rozważmy teraz klasę grafów bez ustalonego drzewa, czy też lasu, jako minoru. Takie klasy będziemy mogli opisać przy pomocy szerokości ścieżkowej.

Dekompozycją ścieżkową grafu G nazywamy dekompozycję drzewiastą (T, \mathcal{B}) grafu G w której T jest ścieżką. *Szerokość ścieżkowa* G , oznaczana przez $\text{pw}(G)$, to najmniejsza szerokość dekompozycji ścieżkowej G . Dowód poniższego twierdzenia zostanie rozpisany w jednym z kolejnych rozdziałów.

Twierdzenie 2.4 (Biestock, Robertson, Seymour, Thomas; 1983). *Dla każdego n -wierzchołkowego lasu F i dla każdego grafu G ,*

$$\text{jeśli } \text{pw}(G) \geq n - 1, \text{ to } F \preceq G.$$

Ćwiczenie. Wykazać, że drzewa mogą mieć dowolnie dużą szerokość ścieżkową.

Wniosek 2.5. *Dla każdej klasy grafów \mathcal{C} następujące warunki są równoważne:*

- (i) *istnieje $k \in \mathbb{N}$, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi $\text{pw}(G) \leq k$,*
- (ii) *istnieje taki las H , że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi $H \not\preceq G$.*

Kolejny przykład jest jednym z najważniejszych twierdzeń w teorii minorów i dotyczy grafów, które nie zawierają ustalonego grafu planarnego jako minoru. Niech n i m będą dodatnimi liczbami naturalnymi. *Krata $n \times m$* to graf o zbiorze wierzchołków $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ w którym wierzchołki (i, j) oraz (i', j') są połączone krawędzią jeśli $|i' - i| + |j' - j| = 1$. Kratę $n \times n$ będziemy oznaczać przez \boxplus_n .

Twierdzenie 2.6 (o kracie, Robertson, Seymour; 1986). *Istnieje taka funkcja f , że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdego grafu G ,*

$$\text{jeśli } \text{tw}(G) \geq f(n), \text{ to } \boxplus_n \preceq G.$$

Obecnie najlepsze znane ograniczenie dla funkcji f to $\mathcal{O}(n^9 \text{poly} \log n)$ podane przez Chuzhoy i Tana w 2019.

Jako że każdy graf planarny jest minorem pewnej kraty, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.7. *Istnieje taka funkcja f , że dla każdego grafu planarnego H ,*

$$\text{jeśli } H \not\preceq G, \text{ to } \text{tw}(G) \leq f(H).$$

Ćwiczenie. Jak duża krata jest potrzebna, aby każdy n -wierzchołkowy graf planarny był jej minorem?

Z drugiej strony, jeśli rozważymy graf nieplanarny H , to klasa grafów niezawierających H jako minoru zawiera wszystkie grafy planarne i w szczególności wszystkie kraty. Ponieważ, kraty mają dowolnie dużą szerokość drzewiastą (patrz ćwiczenie poniżej), grafy z takiej klasy mają nieograniczoną szerokość drzewiastą. Otrzymujemy więc charakteryzację grafów planarnych.

Ćwiczenie. Wykazać, że kraty mają dowolnie dużą szerokość drzewiastą. (Już niedługo zobaczymy jak dowodzić, że szerokość drzewiasta jest duża. Póki co, chodzi o to aby zmierzyć się z tym samym i dojść do jakiegokolwiek funkcji $f(k)$ takiej, że $\text{tw}(\boxplus_{f(k)}) \geq k$.)

Wniosek 2.8. *Dla każdej klasy grafów \mathcal{C} następujące warunki są równoważne:*

- (i) istnieje $k \in \mathbb{N}$, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi $\text{tw}(G) \leq k$,
- (ii) istnieje taki graf planarny H , że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi $H \not\preceq G$.

3. GĘSTOŚĆ I LICZBA CHROMATYCZNA GRAFÓW BEZ K_r -MINORU

Dla niepustego grafu G , przez $\delta(G)$ oznaczamy najmniejszy stopień wierzchołka grafu G , przez $d(G)$ oznaczamy średni stopień wierzchołka w G , czyli $d(G) = 2|E(G)|/|V(G)|$, a przez $\Delta(G)$ oznaczamy największy stopień wierzchołka w G . Oczywiście $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$. Gęstością $\varepsilon(G)$ grafu G nazywamy stosunek $|E(G)|/|V(G)|$. Oczywiście $\varepsilon(G) = d(G)/2$.

W tym rozdziale rozważamy następujący problem natury ekstremalnej: jaka jest najmniejsza liczba m , że każdy graf o n wierzchołkach i m krawędziach zawiera K_r jako minor? Na analogiczne pytanie, w którym zamiast minorów rozważamy podgrafy, odpowiada twierdzenie Turána. Dla liczb naturalnych n i r , graf Turána $T(n, r)$ to graf powstały przez podział n wierzchołków na r możliwie równych części i dodanie krawędzi pomiędzy wierzchołkami w różnych częściach.

Twierdzenie 3.1 (Turán 1941). *Dla dowolnych takich liczb naturalnych n i r , że $r \geq 2$ spośród wszystkich grafów n -wierzchołkowych bez K_r jako podgrafu, najwięcej krawędzi ma graf Turána $T(n, r - 1)$.*

Jako że $|E(T(n, r - 1))| \geq \frac{1}{2}n^2\frac{r-2}{r-1}$, widzimy, że dla ustalonego $r \geq 2$, istnieje n -wierzchołkowy graf o średnim stopniu $\Omega(n)$ bez K_r jako podgrafu. Aby wymusić K_r jako minor wystarczy dużo mniejszy średni stopień.

Propozycja 3.2. Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego grafu G ,

$$\text{jeśli } d(G) \geq 2^{r-2}, \text{ to } K_r \preceq G.$$

Dowód. Prowadzimy indukcję względem r . Dla $r \leq 2$ wynik jest oczywisty. Przyjmijmy więc, że $r \geq 3$ i niech G będzie grafem o średnim stopniu co najmniej 2^{r-2} . Niech H będzie takim niepustym minorem grafu G , że średni stopień H wynosi co najmniej 2^{r-2} , ale każdy niepusty właściwy minor H ma średni stopień mniejszy niż 2^{r-2} . Wówczas $2|E(H)|/|V(H)| \geq 2^{r-2}$, czyli $\varepsilon(H) = |E(H)|/|V(H)| \geq 2^{r-3}$. Graf H jest niepustym grafem bez wierzchołków izolowanych. Ustalmy dowolny wierzchołek $x \in V(H)$. Wówczas dla każdego $y \in N_H(x)$, wierzchołki x i y mają co najmniej 2^{r-3} wspólnych sąsiadów w H ; istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy $\varepsilon(H/xy) \geq (E(H) - 2^{r-3})/(V(H) - 1) \geq 2^{r-3}$. Stąd wynika, że graf $H[N_H(x)]$ ma minimalny stopień $\geq 2^{r-3}$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy więc $K_{r-1} \preceq H[N_H(x)]$. Model grafu K_{r-1} w $H[N_H(x)]$ możemy rozszerzyć do modelu grafu K_r w H , gdzie nowy wierzchołek modelowany jest zbiorem $\{x\}$. Zatem $K_r \preceq H \preceq G$, co kończy dowód. \square

Okazuje się, że wystarczy mieć ograniczenie $d(G) \geq cr\sqrt{\log r}$ dla pewnej stałej c aby wymusić $K_r \preceq G$. Wiadomo też, że powyższe ograniczenie $\mathcal{O}(r\sqrt{\log r})$ jest asymptotycznie optymalne.

Innym naturalnym problemem ekstremalnym jest maksymalna gęstość grafów bez K_r jako minoru topologicznego. *Modelem topologicznym* grafu H w grafie G jest funkcja ϕ która przypisuje każdemu wierzchołkowi $v \in V(H)$ wierzchołek $\phi(v)$ grafu G , a każdej krawędzi $e \in E(H)$ ścieżkę $\phi(e)$ w grafie G w taki sposób, że

- (i) $\phi(u) \neq \phi(v)$ dla różnych wierzchołków $u, v \in V(H)$,
- (ii) dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$ ścieżka $\phi(uv)$ ma końce w $\phi(u)$ i $\phi(v)$ oraz
- (iii) ścieżki $\phi(e)$ i $\phi(e')$ są rozłączne poza końcami dla dowolnych dwu różnych krawędzi $e, e' \in E(H)$.

Jeżeli istnieje model topologiczny grafu H w grafie G , to mówimy, że H jest *minorem topologicznym* grafu G i piszemy $H \preceq_{\text{top}} G$.

Ćwiczenie.

- (i) Jeśli $H \preceq_{\text{top}} G$, to $H \preceq G$.
- (ii) Istnieją takie H i G , że $H \preceq G$ ale $H \not\preceq_{\text{top}} G$.
- (iii) Jeśli stopień każdego wierzchołka grafu H wynosi co najwyżej 3, to $H \preceq G$ implikuje $H \preceq_{\text{top}} G$.

Pokażemy, że grafy o odpowiednio dużym średnim stopniu zawierają K_r jako minor topologiczny.

Propozycja 3.3. Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego grafu G ,

$$\text{jeśli } d(G) \geq 2^{\binom{r}{2}}, \text{ to } K_r \preceq_{\text{top}} G.$$

Zanim przejdziemy do dowodu, udowodnimy dwa pomocnicze lematy.

Lemat 3.4. *Każdy graf G zawierający co najmniej jedną krawędź ma taki podgraf H , że $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$.*

Dowód. Rozważmy procedurę polegającą na sukcesywnym usuwaniu wierzchołków o stopniu nie większym od gęstości grafu, aż do momentu gdy już nie będzie takich wierzchołków. Za każdym razem gdy usuwamy wierzchołek o stopniu nie większym niż gęstość grafu, otrzymujemy graf o nie mniejszej gęstości. Ponieważ G ma co najmniej jedną krawędź, $\varepsilon(G) > 0$. Zatem procedura musi się zakończyć na niepustym podgrafie, gdyż $\varepsilon(K_1) = 0$. Otrzymamy więc taki ciąg podgrafów $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_k$ o gęstościach co najmniej $\varepsilon(G)$, że $\delta(G_i) \leq \varepsilon(G_i)$ dla $i \in \{0, \dots, k-1\}$ oraz $\delta(G_k) > \varepsilon(G_k)$. Stąd graf $H = G_k$ spełnia $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$. \square

Lemat 3.5. *Każdy graf G ma cykl o długości co najmniej $\delta(G) + 1$ (o ile $\delta(G) \geq 2$).*

Dowód. Niech $x_0 \dots x_k$ będzie najdłuższą ścieżką w grafie G . Wówczas każdy z co najmniej $\delta(G)$ sąsiadów wierzchołka x_0 leży na tej ścieżce. Największy taki indeks i , że x_i jest sąsiadem x_0 musi więc spełniać $i \geq \delta(G)$. Stąd $x_0 x_1 \dots x_i x_0$ jest szukanym cyklem. \square

Dowód Propozycji 3.3. Propozycja jest prawdziwa dla $r \leq 2$. Załóżmy więc, że $r \geq 3$. Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdego $m \in \{r, \dots, \binom{r}{2}\}$, jeśli $d(G) \geq 2^m$, to istnieje minor topologiczny H grafu G o r wierzchołkach i m krawędziach.

Rozważmy najpierw przypadek $m = r$. Na mocy lematu 3.4, istnieje podgraf H grafu G , że $\delta(H) > \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G) \geq 2^{r-1} \geq r + 1$. Zatem, na mocy lematu 3.5 graf H zawiera cykl długości co najmniej r . Stąd $C_r \preccurlyeq_{\text{top}} H \subseteq G$, czyli C_r jest szukanym minorem topologicznym.

Teraz załóżmy, że $r < m \leq \binom{r}{2}$. Graf G musi zawierać składową mającą nie mniejszą gęstość niż on sam, więc zawężając się do tej składowej możemy założyć, że G jest spójny. Mamy $d(G) \geq 2^m$, więc $\varepsilon(G) \geq 2^{m-1}$. Niech U będzie maksymalnym podzbiorem $V(G)$ o tej własności, że $G[U]$ jest spójny i $\varepsilon(G/U) \geq 2^{m-1}$. Zbiór U jest dobrze zdefiniowany, bo możemy wziąć jako U dowolny zbiór jednoelementowy i wówczas $G/U = G$. Niech $H = G[N_G[U]]$. Gdyby istniał taki wierzchołek v , że $d_H(v) < 2^{m-1}$, to dla zbioru $U' = U \cup \{v\}$ mielibyśmy $\varepsilon(G/U') \geq \frac{|E(G/U)| - 2^{m-1}}{|V(G/U)| - 1} \geq 2^{m-1}$, co przeczyłoby maksymalności zbioru U . Zatem $d(H) \geq \delta(H) \geq 2^{m-1}$. Na mocy założenia indukcyjnego, w grafie H znajdziemy model topologiczny grafu o r wierzchołkach i $m - 1$ krawędziach. Dodając do tego modelu ścieżkę pomiędzy dwoma niesąsiadującymi wierzchołkami (są takie bo $m - 1 < \binom{r}{2}$), której wszystkie wewnętrzne wierzchołki są w U , otrzymujemy model topologiczny grafu o r wierzchołkach i m krawędziach. \square

Okazuje się, że wystarczy mieć średni stopień $\Omega(r^2)$ aby wymusić $K_r \preccurlyeq_{\text{top}} G$ i to ograniczenie jest asymptotycznie optymalne.

Jak widzimy, minimalne ograniczenia na średni stopień wymuszające minora czy minora topologicznego są dobrze znane. Możemy z nich wywnioskować analogiczne ograniczenia na liczbę chromatyczną.

Ćwiczenie. Każdy graf G o $\chi(G) \geq k$ ma podgraf H taki, że $d(H) \geq k - 1$.

Istnieje więc taka stała c , że jeśli $\chi(G) \geq cr\sqrt{\log r}$ to $K_r \preccurlyeq G$. Jedną z najważniejszych hipotez w teorii grafów mówi jednak, że wystarczy liniowe ograniczenie na liczbę chromatyczną.

Hipoteza 3.6 (Hadwiger 1943). *Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego grafu G ,*

$$\text{jeśli } \chi(G) \geq r, \text{ to } K_r \preccurlyeq G.$$

Od lat osiemdziesiątych $\Omega(r\sqrt{\log r})$ było najlepszym znanym ograniczeniem na liczbę chromatyczną wymuszającym K_r -minora. W 2019 roku Norin i Song opublikowali przełomową pracę, później lekko poprawioną przez Postle'a, w której dowodzą, że $\chi(G) = \Omega(r \log^{1/4+\varepsilon} r)$ wystarcza aby wymusić $K_r \preccurlyeq G$, gdzie ε jest dowolną dodatnią wartością.

Zbiór wierzchołków S w grafie G jest *niezależny* jeśli żadne dwa wierzchołki w tym zbiorze nie są połączone krawędzią. Moc największego zbioru niezależnego w grafie G oznaczamy przez $\alpha(G)$. *Współczynnikiem niezależności* (ang. *independence ratio*) nie pustego grafu G nazywamy stosunek $\frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$. W dowolnym właściwym kolorowaniu n -wierzchołkowego grafu c kolorami istnieje n/c wierzchołków w tym samym kolorze i wierzchołki te tworzą zbiór niezależny, więc dla dowolnego grafu G mamy $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\chi(G)}$ lub równoważnie $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leq \chi(G)$. Hipoteza Hadwigera implikuje więc, że każdy graf w którym odwrotność współczynnika niezależności wynosi co najmniej r , ma K_r -minor. Pokażemy, że zachodzi to gdy zastąpimy ograniczenie dolne r przez $2r$.

Twierdzenie 3.7 (Duchet, Meyniel). *Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego niepustego grafu G ,*

$$\text{jeśli } \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \geq 2r, \text{ to } K_r \preceq G.$$

Dowód. Twierdzenie dowodzimy indukcyjnie względem r . Dla $r = 1$ twierdzenie jest spełnione w trywialny sposób. Załóżmy więc, że $r \geq 2$. Niech G będzie grafem takim, że $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \geq 2r$. Zauważmy, że ograniczając się do pewnej spójnej składowej możemy założyć, że G jest spójny. Jest tak, gdyż jeśli G jest sumą rozłączną dwóch niepustych grafów G_1 i G_2 , to

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} = \frac{\alpha(G_1)}{\alpha(G_1) + \alpha(G_2)} \cdot \frac{|V(G_1)|}{\alpha(G_1)} + \frac{\alpha(G_2)}{\alpha(G_1) + \alpha(G_2)} \cdot \frac{|V(G_2)|}{\alpha(G_2)},$$

a zatem $\frac{|V(G_i)|}{\alpha(G_i)} \leq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ dla pewnego $i \in \{1, 2\}$

Konstruujemy zbiór niezależny S w G oraz spójny podgraf H w G jak następuje. Najpierw wybieramy dowolny wierzchołek $u \in V(G)$ i bierzemy $S = \{u\}$ oraz $H = G[\{u\}]$. Będziemy iteracyjnie powiększać zbiór S oraz podgraf H utrzymując jako niezmiennik, że S jest zbiorem niezależnym w G , H jest spójny, $S \subseteq V(H)$ oraz $|V(H)| \leq 2|S| - 1$. W momencie gdy każdy wierzchołek z $V(G) \setminus S$ sąsiaduje w G z pewnym wierzchołkiem ze zbioru S przerywamy konstrukcję. Załóżmy, że w grafie G istnieje wierzchołek v spoza S który nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem w S . Skoro G jest spójny, to możemy założyć, że odległość v od zbioru S wynosi dokładnie 2, tzn. istnieje ścieżka P o dwu krawędziach której jednym końcem jest v a drugi koniec należy do S . W tym przypadku zastępujemy zbiór S i graf H zbiorem $S \cup \{v\}$ oraz grafem $H \cup P$. Łatwo przekonać się, że po każdym takim kroku zostają zachowane niezmienniki.

W wyniku powyższej konstrukcji otrzymujemy podzbiór wierzchołków S oraz podgraf H grafu G , które spełniają opisane w konstrukcji niezmienniki, a ponadto każdy wierzchołek z $V(G) \setminus V(H)$ ma sąsiada w zbiorze S . Skoro S jest zbiorem niezależnym w G , to $|S| \leq \alpha(G)$, a więc

$$|V(H)| \leq 2|S| - 1 < 2\alpha(G) \leq 2 \cdot \frac{|V(G)|}{2r} = |V(G)|/r.$$

Każdy zbiór niezależny w $G - V(H)$ jest zbiorem niezależnym w G , więc

$$\frac{\alpha(G - V(H))}{|V(G - V(H))|} \leq \frac{\alpha(G)}{(1 - 1/r)|V(G)|} = \frac{1}{(r - 1)/r} \cdot \frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \leq \frac{1}{r - 1}.$$

Na mocy założenia indukcyjnego w $G - V(H)$ istnieje model grafu K_{r-1} . Model ten możemy rozszerzyć do modelu grafu K_r modelując nowy wierzchołek grafem H , który jest spójny i sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami w $V(G) \setminus V(H)$. \square

Przejdziemy teraz do przykładu zastosowania ograniczeń na stopień wymuszających minor. Dla dwóch zbiorów wierzchołków A i B w grafie G , A - B *ścieżką* nazywamy taką ścieżkę $P = v_0 \dots v_k$, że $V(P) \cap A = \{v_0\}$ i $V(P) \cap B = \{v_k\}$. Zbiór wierzchołków X *separuje* zbiory A i B w G , jeśli każda A - B ścieżka w G zawiera wierzchołek z X . Mówimy wtedy, że X jest A - B *separatorom*.

Twierdzenie 3.8 (Menger 1927). *Niech G będzie grafem i niech A i B będą podzbiorem $V(G)$. Wtedy minimalny rozmiar A - B separatora jest równy maksymalnej liczbie rozłącznych A - B ścieżek.*

Niech G będzie grafem, a $X \subseteq V(G)$ podzbiorem zbioru jego wierzchołków. Mówimy, że X jest *połączony* w G jeśli dla dowolnego $l \geq 1$ oraz dla dowolnych różnych wierzchołków $s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_l$ w X istnieją rozłączne wierzchołkowo ścieżki P_1, \dots, P_l w G takie, że P_i ma końce w s_i i t_i oraz nie ma wierzchołków wewnętrznych w X . Jeśli graf G spełnia $|V(G)| \geq 2k$ oraz każdy podzbiór $X \subseteq V(G)$ o mocy co najwyżej $2k$ jest połączony, to mówimy, że G jest k -*połączony*.

Zatem grafy k -połączone są $(2k - 1)$ -spójne. Okazuje się, że również odpowiednio duża spójność grafu gwarantuje jego k -połączoność.

Twierdzenie 3.9 (Jung, 1970; Larman i Mani 1970). *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geq 1$ każdy graf $f(k)$ -spójny jest k -połączony.*

Dowód. Niech $f(k) = h(3k) + 2k$, gdzie $h(r)$ jest taką liczbą, że każdy graf o średnim stopniu co najmniej $h(r)$ zawiera K_r jako minor topologiczny. Na mocy propozycji 3.3, możemy wziąć $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$.

Wykażemy, że f spełnia warunek z tezy. Niech G będzie grafem $f(k)$ -spójnym. Wówczas G zawiera K_{3k} jako minor topologiczny. Ustalmy model topologiczny grafu K_{3k} w G i niech $U \subseteq V(G)$ będzie zbiorem wierzchołków reprezentujących wierzchołki K_{3k} . Weźmy dowolne różne wierzchołki $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ w G . Graf G jest $2k$ -spójny, więc na mocy twierdzenia Mengera istnieje rodzina wierzchołkowo rozłącznych ścieżek $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k\}$ taka, że

- każda ścieżka P_i ma jeden koniec w s_i ,
- każda ścieżka Q_i ma jeden koniec w t_i , oraz
- każda ścieżka w \mathcal{P} ma jeden koniec w U i nie ma wierzchołków wewnętrznych w U .

Wybieramy \mathcal{P} w taki sposób, żeby zminimalizować liczbę krawędzi poza ustalonym modelem topologicznym K_{3k} .

Niech u_1, \dots, u_k będą wierzchołkami z U wolnymi od ścieżek w \mathcal{P} . Ustalmy $i \in \{1, \dots, k\}$. Niech $u \in U$ będzie końcem P_i w U , a $u' \in U$ końcem Q_i w U . Niech L_i będzie $u_i u$ -ścieżką, a M_i będzie $u_i u'$ -ścieżką reprezentującymi krawędzie w naszym modelu. Idąc od wierzchołka u_i wzdłuż ścieżki L_i rozważmy pierwszy wierzchołek x_i na tej ścieżce który leży na ścieżce z rodziny \mathcal{P} . Twierdzimy, że x_i musi leżeć na ścieżce P_i . W przeciwnym wypadku x_i leży na pewnej ścieżce $X \in \mathcal{P}$ i X nie ma wspólnego końca z L_i . To oznacza, że ścieżka X musi odgałęzić się od ścieżki L_i i pierwsza krawędź X poza L_i będzie krawędzią [pza ustalonym modelem K_{3k} . To jednak oznacza, że mogliśmy wybrać rodzinę \mathcal{P} optymalniej kierując ścieżkę X wzdłuż L_i do wierzchołka u_i . Niech y_i będzie analogicznie wybranym przecięciem ścieżki M_i oraz Q_i .

Dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ definiujemy ścieżkę $s_i P_i x_i L_i u_i M_i y_i Q_i t_i$. Rodzina tych ścieżek jest szukanym połączeniem wierzchołków s_1, \dots, s_k z t_1, \dots, t_k . \square

Powyższy dowód gwarantuje istnienie funkcji $f(k) = O(k^2)$. Wiadomo, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liniowej funkcji f .

Twierdzenie 3.10 (Thomas i Wollan, 2005). *Niech G będzie grafem i $k \geq 1$. Jeśli G jest $2k$ -spójny oraz $d(G) \geq 16k$, to G jest k -połączony. Zatem grafy $16k$ -spójne są k -połączone.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w trzecim rozdziale książki Diestela.

Zakończymy ten rozdział dość zaskakującą na pierwszy rzut oka obserwacją. Otóż możemy zagwarantować dowolnie dużą klikę jako minor już w grafach o minimalnym stopniu 3, jeśli ograniczymy od dołu długość najmniejszego cyklu. Najłatwiej to zobaczyć wymuszając po drodze minor o dużym średnim stopniu a potem aplikując propozycję 3.2.

Długość ścieżki w grafie to liczba krawędzi w tej ścieżce. Zatem ścieżka jednowierzchołkowa ma długość 0. Niech G będzie grafem. *Odległość* pomiędzy dwoma wierzchołkami x i y w G , oznaczana $\text{dist}_G(x, y)$, to długość najkrótszej ścieżki pomiędzy x i y w G , a w przypadku gdy nie ma ścieżki pomiędzy x i y przyjmujemy, że $\text{dist}_G(x, y) = \infty$. W sytuacji gdy kontekst grafu jest jasny będziemy pisać $\text{dist}(x, y)$ zamiast $\text{dist}_G(x, y)$. *Odległość* wierzchołka y od zbioru X dla $X \subseteq V(G)$, to $\min_{x \in X} \text{dist}(x, y)$.

Talią $\text{girth}(G)$ grafu G nazywamy długość najkrótszego cyklu w G (jeśli G nie ma cyklu to talia jest nieskończona).

Lemat 3.11. *Niech d, k będą liczbami naturalnymi i niech $d \geq 3$. Niech G będzie grafem o minimalnym stopniu $\delta(G) \geq d$ oraz talii $\text{girth}(G) \geq 8k + 3$. Wtedy G ma minor H o minimalnym stopniu $\delta(H) \geq d(d - 1)^k$.*

Dowód. Rozważmy maksymalny zbiór X grafu G taki, że $\text{dist}(x, y) > 2k$ dla dowolnych dwu różnych $x, y \in X$. Podzielimy teraz wierzchołki grafu G na drzewa ukorzenione w wierzchołkach z X . Niech $T_x^0 = \{x\}$ dla każdego $x \in X$. Dla dowolnego $i < 2k$, przyjmijmy, że zdefiniowaliśmy rozłączne drzewa T_x^i dla $x \in X$ takie, że w sumie wierzchołki tych drzew to dokładnie wierzchołki w odległości co najwyżej i od X w G . Dla każdego wierzchołka y w odległości dokładnie $i + 1$ od X wybierzmy jednego jego sąsiada z w odległości i od X i dodajmy krawędź yz do drzewa w którym jest z . W ten sposób generujemy rodzinę drzew T_x^{i+1} dla $x \in X$. Zauważmy, że każdy wierzchołek grafu G jest w odległości co najwyżej $2k$ od X (z maksymalności zbioru X). Zatem drzewa T_x^{2k} dla $x \in X$, pokrywają wszystkie wierzchołki grafu G .

Niech H będzie minorem G otrzymanym przez kontrakcję drzew T_x^{2k} dla $x \in X$. Pozostaje wykazać, że $\delta(H) \geq d(d - 1)^k$. Zauważmy najpierw, że każde drzewo T_x^{2k} jest indukowanym podgrafem G . Rzeczywiście, gdyby była jakakolwiek krawędź w G pomiędzy wierzchołkami w $V(T_x^{2k})$, która nie jest w T_x^{2k} , to otrzymalibyśmy cykl w G długości co najwyżej $2k + 2k + 1$ ale $\text{girth}(G) > 4k + 1$, zatem takiej krawędzi nie ma. Podobnie, istnieje co najwyżej jedna krawędź pomiędzy wierzchołkami T_x^{2k} a wierzchołkami T_y^{2k} dla dowolnych różnych $x, y \in X$. Rzeczywiście, gdyby były dwie krawędzie to zamykałyby one cykl w G długości co najwyżej $4k + 4k + 2$ ale $\text{girth}(G) > 8k + 2$, zatem nie ma takich dwu krawędzi. Zatem krawędzie pomiędzy różnymi drzewami T_x^{2k} dla $x \in X$, indukują różne krawędzie w grafie H .

Ile zatem co najmniej jest krawędzi w grafie H ? Zauważmy, że dla dowolnego wierzchołka u w T_x^{k-1} każdy spośród $d(u) \geq \delta(G) \geq d$ sąsiadów u w G musi być w $T_x^k \subseteq T_x^{2k}$. Gdyby pewien taki sąsiad v należał do T_y^k dla $y \neq x$ i $y \in X$, to odległość pomiędzy x i y wynosiłaby co najwyżej $2k$, przecząc definicji X . A zatem, każde drzewo T_x^{2k} ma co najmniej $d(d - 1)^{k-1}$ liści. Ponieważ każdy liść takiego drzewa wyprowadza co najmniej $d - 1$ krawędzi na zewnątrz i każda krawędź świadczy inną krawędź w H dostajemy, że każdy wierzchołek H ma co najmniej $d(d - 1)^k$ sąsiadów. \square

Powyższy lemat wraz z propozycją 3.2 natychmiast implikują co następuje.

Twierdzenie 3.12 (Thomassen 1983). *Istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że dla każdego grafu G i dla każdej liczby naturalnej r ,*

$$\text{jeśli } \delta(G) \geq 3 \text{ i } \text{girth}(G) \geq f(r), \text{ to } K_r \preceq G.$$

4. GRAFY BEZ USTALONEGO DRZEWIA JAKO MINORU

Dekompozycją ścieżkową grafu G nazywamy taki ciąg zbiorów (W_1, \dots, W_s) , że spełnione są następujące warunki:

- (P1) $W_1 \cup \dots \cup W_s = V(G)$,
- (P2) każda krawędź grafu G ma oba końce w pewnym W_i , oraz
- (P3) $W_{i_1} \cap W_{i_3} \subseteq W_{i_2}$ dla dowolnych i_1, i_2, i_3 , gdzie $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq s$.

Szerokość dekompozycji ścieżkowej (W_1, \dots, W_s) wynosi $\max\{|W_i| - 1 : 1 \leq i \leq s\}$. Szerokość ścieżkowa grafu G , oznaczana $\text{pw}(G)$, to najmniejsza szerokość dekompozycji ścieżkowej grafu G . Zauważmy, że jeżeli (W_1, \dots, W_s) jest dekompozycją ścieżkową grafu G a H jest podgrafem G , to $(W_1 \cap V(H), \dots, W_s \cap V(H))$ jest dekompozycją ścieżkową grafu H .

Lemat 4.1. *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n , pełne drzewo ternarne o głębokości n ma szerokość ścieżkową co najmniej n .*

Dowód. Lemat dowodzimy indukcyjnie. Niech T będzie pełnym drzewem ternarnym o głębokości n . Jeśli $n = 0$, to T jest pojedynczym wierzchołkiem i $\text{pw}(T) = 0$. Załóżmy więc, że $n \geq 1$ i niech v będzie korzeniem T . Wówczas $T - v$ ma trzy spójne składowe T_1, T_2 i T_3 , i każda z nich jest pełnym drzewem ternarnym o głębokości $n - 1$. Weźmy dowolną dekompozycję ścieżkową (W_1, \dots, W_s) drzewa T . Wystarczy teraz pokazać, że pewien zbiór W_i ma rozmiar co najmniej $n + 1$.

Bez straty ogólności załóżmy, że $W_1 \neq \emptyset$ i $W_s \neq \emptyset$. Wtedy niech P będzie dowolną W_1 - W_s ścieżką (ona istnieje bo T jest spójny). Zauważmy, że dla każdego $i \in \{1, \dots, s\}$ mamy $W_i \cap V(P) \neq \emptyset$: gdyby dla pewnego indeksu i mielibyśmy $W_i \cap V(P) = \emptyset$, to otrzymalibyśmy podział zbioru $V(P)$ na dwa niepuste zbiory $(W_1 \cup \dots \cup W_{i-1}) \cap V(P)$ i $(W_{i+1} \cup \dots \cup W_s) \cap V(P)$ między którymi nie ma żadnej krawędzi, co przeczyłoby spójności P .

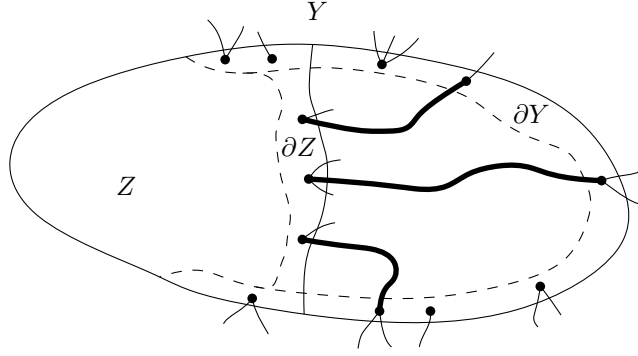
Ścieżka P przecina co najwyżej dwa drzewa T_1, T_2 i T_3 , więc bez straty ogólności załóżmy, że $V(P) \cap V(T_1) = \emptyset$. Na mocy założenia indukcyjnego, szerokość indukowanej dekompozycji ścieżkowej $(W_1 \cap V(T_1), \dots, W_s \cap V(T_1))$ drzewa T_1 wynosi co najmniej $n - 1$, a więc istnieje takie $i \in \{1, \dots, s\}$, że $|W_i \cap V(T_1)| \geq n$. Ponieważ W_i zawiera wierzchołek ze ścieżki P i $V(P) \cap V(T_1) = \emptyset$, to dostajemy $|W_i| \geq n + 1$ i P . To kończy dowód indukcyjny. \square

Twierdzenie 4.2. *Jeśli $\text{pw}(G) \geq n$, to każdy $(n + 1)$ -wierzchołkowy las jest minorem grafu G .*

Zanim przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia, musimy wprowadzić parę oznaczeń.

Brzegiem zbioru wierzchołków X w grafie G nazywamy zbiór ∂X składający się ze wszystkich tych wierzchołków w X , które są połączone krawędzią z jakimkolwiek wierzchołkiem spoza X w G . Mówimy, że zbiór wierzchołków X jest n -rozkładalny w G jeśli istnieje taka dekompozycja ścieżkowa (W_1, \dots, W_s) grafu $G[X]$, że $\partial X \subseteq W_s$ oraz szerokość dekompozycji jest mniejsza niż n (czyli $|W_i| \leq n$ dla $i \in \{1, \dots, s\}$). Dekompozycję tę nazywamy *częściową dekompozycją ścieżkową* grafu G . Jako że $\partial(V(G)) = \emptyset$, mamy $\text{pw}(G) < n$ wtedy i tylko wtedy gdy zbiór $V(G)$ jest n -rozkładalny w G .

Lemat 4.3. *Niech Y będzie n -rozkładalnym zbiorem w grafie G i niech $Z \subseteq Y$. Jeżeli istnieje $|Z|$ rozłącznych Z - ∂Y ścieżek w G , to Z jest n -rozkładalny. Patrz rysunek 9.*



RYSUNEK 9. Zbiór $Z \subseteq Y$ w którym $|\partial Z| = 6$. Sześć $Z - \partial Y$ ścieżek (w tym 3 trywialne).

Dowód. Niech (W_1, \dots, W_s) będzie częściową dekompozycją ścieżkową grafu G świadczącą to, że zbiór Y jest n -rozkładalny. Dla każdego $i \in \{1, \dots, s\}$, definiujemy zbiór W'_i jako

$$W'_i = ((W_1 \cup \dots \cup W_i) \cap \partial Z) \cup (W_i \cap Z).$$

Pokażemy, że (W'_1, \dots, W'_s) jest częściową dekompozycją ścieżkową która świadczy o tym, że zbiór Z jest n -rozkładalny. Najpierw uzasadnimy, że jest to dekompozycja ścieżkowa grafu $G[Z]$. Warunki (P1) i (P2) wynikają z tego, że $W_i \cap Z \subseteq W'_i \subseteq Z$ dla $i \in \{1, \dots, s\}$ oraz (W_1, \dots, W_s) jest dekompozycją ścieżkową nadgrafu grafu $G[Z]$. Dla dowodu (P3), niech $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq s$. Wówczas

$$\begin{aligned} (W'_{i_1} \cap W'_{i_3}) \cap \partial Z &= (W'_{i_1} \cap \partial Z) \cap (W'_{i_3} \cap \partial Z) \\ &\subseteq (W_1 \cup \dots \cup W_{i_1}) \cap \partial Z \\ &\subseteq (W_1 \cup \dots \cup W_{i_2}) \cap \partial Z \subseteq W'_{i_2}, \end{aligned}$$

oraz skoro (W_1, \dots, W_s) spełnia (P3), to

$$(W'_{i_1} \cap W'_{i_3}) \setminus \partial Z \subseteq W_{i_1} \cap W_{i_3} \cap Z \subseteq W_{i_2} \cap Z \subseteq W'_{i_2}.$$

Zatem $W'_{i_1} \cap W'_{i_3} \subseteq W'_{i_2}$, czyli warunek (P3) jest spełniony. Faktycznie więc (W'_1, \dots, W'_s) jest dekompozycją ścieżkową grafu $G[Z]$.

Mamy $\partial Z = (W_1 \cup \dots \cup W_s) \cap \partial Z \subseteq W'_s$, więc pozostaje pokazać, że szerokość dekompozycji (W'_1, \dots, W'_s) jest mniejsza niż n . Niech \mathcal{P} będzie rodziną $|\partial Z|$ rozłącznych $Z - \partial Y$ ścieżek w G . Zauważmy, że każda ścieżka w \mathcal{P} ma koniec w ∂Z ; istotnie, jeśli taka ścieżka jest trywialna, to jej jedyny wierzchołek leży w $Z \cap \partial Y \subseteq \partial Z$, a jeśli jest nietrywialna, to jej koniec w Z jest w ∂Z . Ponieważ $|\mathcal{P}| = |\partial Z|$, stąd wiemy że każdy element ∂Z jest końcem pewnej ścieżki z \mathcal{P} .

Rozważmy $i \in \{1, \dots, s\}$. Zauważmy, że każda ścieżka w \mathcal{P} która ma koniec w $(W_1 \cup \dots \cup W_i) \cap \partial Z$ przecina W_i a nawet $W_i \setminus (Z \setminus \partial Z)$. Rzeczywiście, taka ścieżka ma jeden koniec w $W_1 \cup \dots \cup W_i$ a drugi koniec w $\partial Y \subseteq W_s$, a zatem musi mieć element w W_i (a ponieważ jest to $Z - \partial Y$ -ścieżka, to nie może mieć elementu w $Z \setminus \partial Z$). Ponieważ ścieżki w \mathcal{P} są rozłączne, mamy

$$n \geq |W_i| \geq |(W_1 \cup \dots \cup W_i) \cap \partial Z| + |W_i \cap (Z \setminus \partial Z)| = |W'_i|.$$

Zatem (W'_1, \dots, W'_s) ma szerokość mniejszą niż n . To dowodzi, że zbiór Z jest n -rozkładalny. \square

Mówimy, że model ϕ grafu H w G jest *ukorzeniony* w zbiorze wierzchołków A jeśli $|V(\phi(u)) \cap A| = 1$ dla każdego $u \in V(H)$.

Dowód twierdzenia 4.2. Niech G będzie grafem spełniającym $\text{pw}(G) \geq n$ i niech F będzie $(n+1)$ -wierzchołkowym lasem. Niech (v_1, \dots, v_{n+1}) będzie takim uporządkowaniem wierzchołków lasu F , że każdy wierzchołek v_{i+1} sąsiaduje z co najwyżej jednym wierzchołkiem ze zbioru $\{v_1, \dots, v_i\}$. Indukcyjnie dla każdego $i \in \{0, \dots, n+1\}$ pokażemy, że istnieje taki zbiór wierzchołków X^i oraz model ϕ^i lasu $F[\{v_1, \dots, v_i\}]$ w $G[X^i]$, że jeśli $i \leq n$, to

- (i) model ϕ^i jest ukorzeniony w ∂X^i
- (ii) X^i jest maksymalnym na inkluzję zbiorem, który jest n -rozkładalny i spełnia $|\partial X^i| \leq i$.

W szczególności powyższe warunki implikują, że $|\partial X^i| = i$. Jako X^0 możemy wybrać dowolny maksymalny na inkluzję n -rozkładalny zbiór spełniający $|\partial X^0| = 0$ (być może $X^0 = \emptyset$; ogólnie X^0 to zbiór wierzchołków wszystkich spójnych składowych G o szerokości ścieżkowej mniejszej niż n). Załóżmy, że dla pewnego $i \in \{0, \dots, n\}$ zdefiniowaliśmy już X^i i niech ϕ będzie modelem lasu $F[\{v_1, \dots, v_i\}]$ w $G[X^i]$ ukorzenionym w ∂X^i . Skoro $\text{pw}(G) \geq n$, to zbiór $V(G)$ nie jest n -rozkładalny, więc $X^i \neq V(G)$. Jeśli v_{i+1} nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem ze zbioru $\{v_1, \dots, v_i\}$, to niech x będzie dowolnym wierzchołkiem ze zbioru $V(G) \setminus X^i$. Jeśli zaś v_{i+1} sąsiaduje z pewnym takim v_j , że $j \leq i$, to niech x będzie dowolnym nienależącym do X^i sąsiadem jednego wierzchołka w zbiorze $V(\phi(v_j)) \cap \partial X^i$. Jeżeli $i = n$, to możemy wziąć $X^{i+1} = V(G)$ oraz model ϕ^{i+1} zdefiniowany przez $\phi^{i+1}(v_j) = \phi^i(v_j)$ dla $j \leq i$ oraz $\phi^{i+1}(v_{i+1}) = G[\{x\}]$.

Założmy więc, że $i \leq n-1$ i pokażemy, że istnieją X^{i+1} oraz ϕ^{i+1} spełniające warunki (i) i (ii). Zdefiniujmy

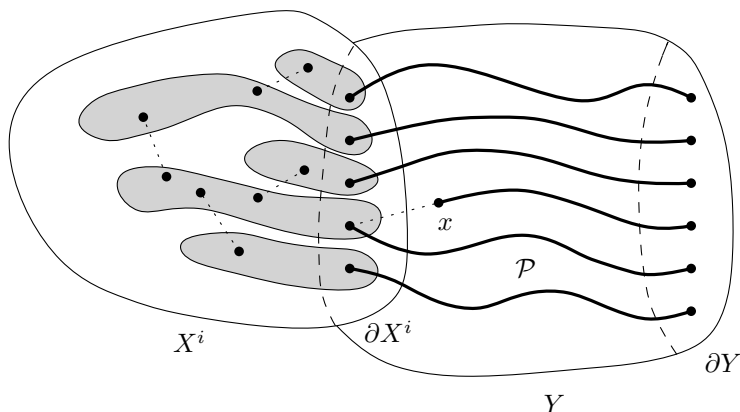
$$X := X^i \cup \{x\}.$$

Patrz rysunek 10. Jeśli (W_1, \dots, W_s) jest częściową dekompozycją ścieżkową świadczącą n -rozkładalność zbioru X^i , to $(W_1, \dots, W_s, \partial X^i \cup \{x\})$ jest częściową dekompozycją ścieżkową świadczącą n -rozkładalność zbioru X . Zatem na mocy (ii), mamy $|\partial X| > i$. Skoro jednak $\partial X \subseteq \partial X^i \cup \{x\}$, to musi zachodzić $|\partial X| = |\partial X^i \cup \{x\}| = i+1$. Niech Y będzie maksymalnym na inkluzję nadzbiorem zbioru X który jest n -rozkładalny i spełnia $|\partial Y| \leq i+1$. Zbiór Y będzie naszym X^{i+1} .

Niech \mathcal{P} będzie największą rodziną rozłącznych X - ∂Y ścieżek w G . Twierdzimy, że $|\mathcal{P}| \geq i+1$ (czyli $|\mathcal{P}| = |\partial Y| = i+1$). Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $|\mathcal{P}| \leq i$. Na mocy twierdzenia Mengera istnieje taki X - ∂Y separator S , że $|S| = |\mathcal{P}|$, więc z definicji separatora, każdy wierzchołek w S należy do jednej ścieżki w \mathcal{P} . Skoro $X \subseteq Y$, to każda X - ∂Y ścieżka ma wszystkie wierzchołki w Y , więc $S \subseteq Y$. Niech Z będzie sumą zbioru S oraz zbiorów wierzchołków tych spójnych składowych grafu $G - S$ które zawierają co najmniej jeden wierzchołek z X . Wówczas $\partial Z = S$. Skoro

S jest X - ∂Y separatorem i $S \subseteq Y$, mamy $Z \subseteq Y$. Z każdej z $|\partial Z| = |S|$ ścieżek w \mathcal{P} możemy wybrać podścieżkę od S do ∂Y , więc na mocy lematu 4.3 zbiór Z jest n -rozkładalny. Skoro jednak $X^i \subsetneq X \subseteq Z$, dostajemy sprzeczność z warunkiem (ii).

Faktycznie więc $|\mathcal{P}| = i + 1$. Skoro $X \subseteq Y$, każda X - ∂Y ścieżka ma koniec w ∂X . Niech P_1, \dots, P_{i+1} będą ścieżkami w \mathcal{P} przy czym $V(\phi^i(v_k)) \cap V(P_k) \neq \emptyset$ dla $k \in \{1, \dots, i\}$. Wtedy mamy $x \in V(P_{i+1})$. Definiujemy $X^{i+1} = Y$ oraz $\phi^{i+1}(v_k) = \phi^i(v_k) \cup P_k$ dla $k \in \{1, \dots, i\}$, zaś $\phi^{i+1}(v_{i+1}) = P_{i+1}$. \square



RYSUNEK 10. Krok w konstrukcji minoru lasu.

5. PARAMETRY ZWIĄZANE Z SZEROKOŚCIĄ DRZEWIASTĄ

5.1. **Jeżyny.** Jaka jest szerokość drzewiasta kraty \boxplus_n ? Jak pokazać ograniczenie dolne? Magia szerokości drzewiastej polega na tym, iż istnieje kanoniczna przeszkoda w grafie na drodze do posiadania szerokości drzewiastej co najwyżej k .

Dwa podzbiory wierzchołków $A, B \subseteq V(G)$ dotykają się w G , jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ lub istnieje A - B krawędź w G . Rodzinę spójnych podzbiorów $V(G)$ takich, że każde dwa się dotykają, nazywamy jeżyną w G . Zbiór $X \subseteq V(G)$ trafia jeżynę \mathcal{B} , jeśli dla każdego $B \in \mathcal{B}$ zachodzi $X \cap B \neq \emptyset$. Rząd jeżyny \mathcal{B} to wielkość najmniejszego zbioru trafiającego \mathcal{B} . Liczba jeżynowa grafu G oznaczana $\text{bn}(G)$ to największy rząd jeżyny w G .

Przykład 5.1. Krzyżem C_{ij} w kratce \boxplus_n nazywamy zbiór $\{(i, \ell) \mid \ell \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{(\ell, j) \mid \ell \in \{1, \dots, n\}\}$. Zbiór wszystkich krzyży w kratce \boxplus_n jest jeżyną rzędu n .

Twierdzenie 5.2 (o dualności szerokości drzewiastej. Seymour, Thomas, 1993). Dla każdego $k \geq 1$, dla każdego G zachodzi

$$\text{tw}(G) \geq k \Leftrightarrow G \text{ ma jeżynę rzędu większego niż } k.$$

Równoważnie $\text{tw}(G) = \text{bn}(G) - 1$.

Tak, naprawdę istotne jest to, że $\text{tw}(G)$ i $\text{bn}(G)$ są ze sobą związane, a fakt że w zasadzie są równe to miły bonus. Wykażemy poniżej jedynie implikację w lewo.

Implikacja w prawo nie jest bardzo trudna ale jest trochę techniczna i tym razem wolimy zrobić inne rzeczy. Pełny dowód można zobaczyć w książce Diestela.

Dowód implikacji \Leftarrow w twierdzeniu 5.2. Niech G będzie grafem o szerokości drzewiastej mniejszej niż k , a \mathcal{B} jeżyną w G . Niech (T, \mathcal{V}) , gdzie $\mathcal{V} = (V_t)_{t \in V(T)}$, będzie dowolną dekompozycją drzewiastą grafu G . Wykażemy, że ta dekompozycja ma worek trafiający \mathcal{B} . Jeśli weźmiemy dekompozycję drzewiastą świadczącą $\text{tw}(G) < k$, to będzie oznaczać, że \mathcal{B} ma rząd co najwyżej k .

Dla każdego elementu $B \in \mathcal{B}$ niech $T_B = \{t \in V(T) \mid \exists v \in B \text{ taki, że } v \in V_t\}$. Ponieważ każdy $B \in \mathcal{B}$ jest spójny, wiemy że T_B indukuje poddrzewo T . Ponieważ dowolne dwa elementy B, B' w \mathcal{B} się dotykają, wiemy że drzewa T_B oraz $T_{B'}$ się wierzchołkowo przecinają. Z własności Helly'ego dla drzew istnieje $t \in V(T)$ taki, że $t \in \bigcap_{B \in \mathcal{B}} T_B$. Zatem worek V_t przecina się niepusto z każdym elementem jeżyny \mathcal{B} , co było do pokazania. \square

5.2. Dekompozycje gałęziowe. Niech G będzie grafem, a $A, B \subseteq G$ dwoma jego podgrafami. Para (A, B) jest *separacją* G jeśli $A \cup B = G$ oraz $E(A) \cap E(B) = \emptyset$. *Rząd* separacji (A, B) oznaczany $\text{ord}(A, B)$ równy jest $|V(A) \cap V(B)|$. *k-separacja* grafu G to separacja o rzędzie co najwyżej k .

Twierdzenie 5.3 (Menger, równoważne sformułowanie). *Niech G będzie grafem oraz $X, Y \subseteq V(G)$. Wtedy minimalny rząd separacji (A, B) grafu G takiej, że $X \subseteq V(A)$ i $Y \subseteq V(B)$ równa się maksymalnej liczbie rozłącznych X - Y ścieżek w G .*

Para (T, Θ) jest *dekompozycją gałęziową* grafu G , jeśli

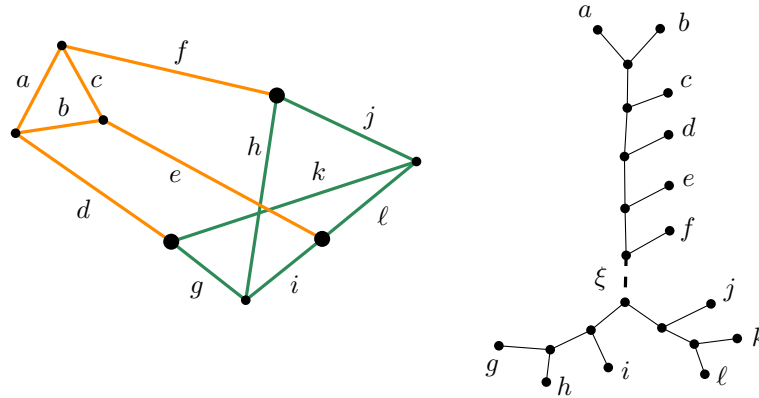
- (B1) T jest drzewem, w którym każdy wierzchołek wewnętrzny ma stopień 3,
- (B2) Θ jest bijekcją z $E(G)$ do liści drzewa T .

Każda krawędź $t_1 t_2$ dekompozycji gałęziowej (T, Θ) grafu G wyznacza podział zbioru $E(G)$ na dwie części E_1 oraz E_2 , gdzie E_i składa się z takich krawędzi $e \in E(G)$, że $\Theta(e)$ leży w tej samej składowej lasu $T - t_1 t_2$ co t_i . Wówczas $(G[E_1], G[E_2])$ jest separacją grafu powstałego przez usunięcie z G wierzchołków izolowanych. *Rzędem* krawędzi $t_1 t_2$ w dekompozycji (T, Θ) nazywamy rząd separacji $(G[E_1], G[E_2])$. Patrz Rysunek 5.2. *Szerokość* dekompozycji gałęziowej (T, Θ) grafu G to największy rząd krawędzi w T . *Szerokość gałęziowa* (ang. branchwidth) grafu G , oznaczana $\text{bw}(G)$, to najmniejsza szerokość dekompozycji gałęziowej G . (Jeśli $|E(G)| \leq 1$, to przyjmujemy, że graf nie ma dekompozycji gałęziowej i $\text{bw}(G) = 0$.)

Lemat 5.4 (Robertson, Seymour 1991). *Dla każdego grafu G , jeśli $\text{bw}(G) \geq 2$, to*

$$\text{bw}(G) \leq \text{tw}(G) + 1 \leq \frac{3}{2} \text{bw}(G).$$

Dowód. Wykażemy najpierw drugą nierówność: $\text{tw}(G) + 1 \leq \frac{3}{2} \text{bw}(G)$. Zakładamy, że G nie ma wierzchołków izolowanych. Niech $k = \text{bw}(G)$ i niech (T, Θ) będzie dekompozycją gałęziową o szerokości k . Konstruujemy dekompozycję drzewiastą



RYSUNEK 11. Graf G i jego dekompozycja gałęziowa (T, Θ) . Krawędź ξ w T ma rząd 3. Na pomarańczowo i zielono wyróżnione są dwie strony odpowiedniej separacji G rzędu 3.

$(T, (B_t)_{t \in V(T)})$ grafu G , definiując $B_t = \{v, w\}$, jeśli t jest liściem w T oraz $\Theta(vw) = t$; oraz $B_t = \{v \mid v \text{ leży w poprzek pewnej krawędzi przylegającej do } t \text{ w } T\}$, jeśli t jest wierzchołkiem wewnętrznym T .

Wówczas należy sprawdzić czy $(T, (B_t)_{t \in V(T)})$ jest rzeczywiście dekompozycją drzewiastą G . Niech $T_v = \{t \in V(T) \mid v \in B_t\}$. Zauważmy, że każde T_v jest niepuste (bo G nie ma wierzchołków izolowanych). Każda krawędź uv w $E(G)$ zawiera się w $B_{\Theta(uv)}$. Zatem jedyną nietrywialną rzeczą do sprawdzenia to czy T_v jest spójne w T . No i rzeczywiście jest spójne.

Jaka jest szerokość $(T, (B_t))$? Jeśli t jest liściem to $|B_t| = 2$. Jeśli zaś t jest wierzchołkiem wewnętrznym to niech A, B i C będą zbiorami wierzchołków leżącymi w poprzek kolejnych trzech krawędzi incydentnych z t w T . Wtedy mamy

$$2|B_t| \leq |A| + |B| + |C| \leq 3k.$$

A zatem

$$|B_t| \leq \max \left\{ 2, \frac{3}{2}k \right\} = \frac{3}{2}k,$$

co kończy dowód drugiej nierówności.

Przejdźmy do dowodu pierwszej nierówności. Niech $k = \text{tw}(G) + 1$. Jeśli $k < 2$, to $E(G) = \emptyset$ i $\text{bw}(G) = 0$. Załóżmy więc, że $k \geq 2$. Weźmy dowolną dekompozycję drzewiastą (T, \mathcal{B}) grafu G w której największy worek ma rozmiar k oraz dla każdego liścia t istnieje taki wierzchołek u grafu G , że B_t jest jedynym workiem zawierającym ten wierzchołek oraz B_t nie zawiera innych wierzchołków niż u i wszystkich jego sąsiadów (dowód istnienia takiej dekompozycji zostawiamy jako ćwiczenie).

Możemy założyć, że jeśli pewien węzeł t drzewa T ma stopień 2, to dla pewnej krawędzi $uv \in E(G)$, B_t jest jedynym workiem zawierającym u i v : gdyby tak nie było moglibyśmy usunąć t i połączyć krawędzią jedynych dwóch sąsiadów t .

Dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ wybierzmy dowolny taki worek B_t , że $\{u, v\} \subseteq B_t$. Jeśli t nie jest takim liściem, że $B_t = \{u, v\}$, to dodajmy do dekompozycji nowy liść

części X . Rozważ t w T który jest ujściem naszej orientacji. Niech ξ_1, ξ_2 i ξ_3 będą krawędziami incydentnymi do t w T . Każdy wierzchołek $x \in X$ jest incydentny do jakiejś krawędzi w G a ta krawędź jest w którejś z trzech składowych lasu $T - t$. Zatem x musi być w co najmniej jednej małej części. To dowodzi, że

$$|X| \leq 3k,$$

tak jak chcieliśmy. □

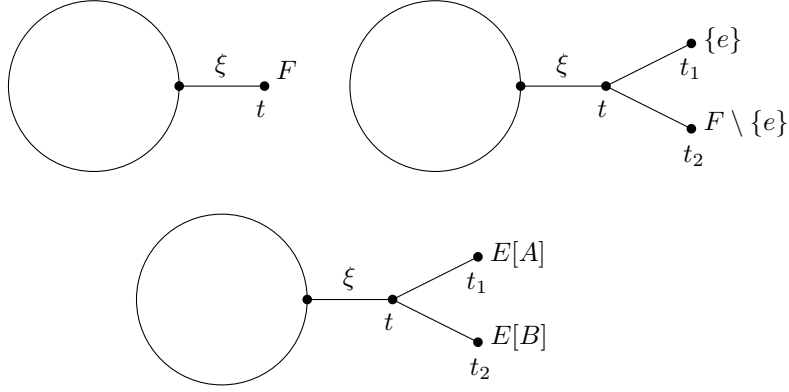
Lemat 5.7. *Dla każdego grafu G , jeśli $\text{bw}(G) > k \geq 2$, to G ma zbiór wysoce spójny rozmiaru k .*

Dowód. Częściową dekompozycją gałęziową grafu G nazywamy taką parę (T, Θ) , że T jest drzewem w którym każdy wierzchołek wewnętrzny ma stopień 3 oraz Θ jest surjekcją z $E(G)$ do liści T . Szerokość częściowej dekompozycji gałęziowej definiujemy w sposób analogiczny do zwykłej dekompozycji gałęziowej. Wybierzmy częściową dekompozycję (T, Θ) o szerokości co najwyżej k i o jak największej liczbie liści. Taka częściowa dekompozycja istnieje, bo możemy wziąć drzewo o dwóch wierzchołkach, gdzie jeden liść ma przypisaną dowolną krawędź e grafu G , a drugi wszystkie pozostałe. Tutaj wykorzystaliśmy, że $k \geq 2$.

Skoro $\text{bw}(G) > k$, to (T, Θ) ma liść t etykietowany więcej niż jedną krawędzią. Niech ξ będzie jedyną krawędzią drzewa T przylegającą do t , a F będzie zbiorem krawędzi, którymi jest etykietowany liść t . Niech X będzie zbiorem wierzchołków idących w poprzek ξ . Wykażemy, że $|X| \geq k$ oraz że X jest wysoce spójny w $G[F]$.

Założmy najpierw dla dowodu nie wprost, że $|X| < k$. Przypomnijmy sobie również, że każdy wierzchołek $x \in X$ jest indycentny do choć jednej krawędzi w F i choć jednej poza F . Niech $e \in F$ będzie dowolną krawędzią incydentną z choć jednym wierzchołkiem w X (zakładam tutaj, że $X \neq \emptyset$; jeśli X jest pusty to e może być dowolną krawędzią z F). Wówczas możemy otrzymać nową częściową dekompozycję grafu G doklejając dwa nowe liście t_1, t_2 w drzewie T do wierzchołka t . Niech liść t_1 etykietowany będzie $\{e\}$, a liść t_2 etykietowany będzie zbiorem $F \setminus \{e\}$. Patrz Rysunek 5.3. Otrzymana dekompozycja ma szerokość nie większą niż k gdyż (1) X jest wciąż zbiorem wszystkich wierzchołków w poprzek krawędzi ξ ; (2) wierzchołki w poprzek tt_1 to jedynie dwa końce e ; (3) wierzchołki w poprzek tt_2 zawierają się w zbiorze X plus końce krawędzi e , a ponieważ tylko jeden z końców e może być poza X to jest tych wierzchołków w sumie $\leq |X| + 1 \leq k$. Do tego nowa częściowa dekompozycja ma więcej liści niż (T, Θ) – sprzeczność.

Założmy teraz, że $|X| \geq k$ i X nie jest wysoce spójny w $G[F]$. Wówczas istnieją takie podzbiory $X_1, X_2 \subseteq X$, że w $G[F]$ nie ma $\ell = \min\{|X_1|, |X_2|\}$ rozłącznych X_1 - X_2 ścieżek w $G[F]$. Na mocy twierdzenia Mengera istnieje separacja (A, B) grafu $G[F]$ o rzędzie mniejszym niż ℓ taka, że $X_1 \subseteq V(A)$ oraz $X_2 \subseteq V(B)$. Doklejając znowu dwa nowe liście t_1, t_2 do wierzchołka t i etykietując je odpowiednio zbiorami $E(A)$ i $E(B)$ otrzymujemy dekompozycję o nie większej szerokości i większej liczbie liści niż (T, Θ) , co jest sprzecznością. □



RYSUNEK 13. Szkic trzech częściowych dekompozycji: (1) dekompozycja wyjściowa w dowodzie; (2) dekompozycja konstruowana w argumencie dla $|X| < k$; (3) dekompozycja konstruowana w argumencie gdy X nie jest wysoce spójny w $G[F]$.

6. SPLĄTANIA

Niech G będzie grafem i $V(G) \neq \emptyset$. Niech k będzie liczbą całkowitą i $k \geq 1$. *Splątaniem* rzędu k grafu G nazywamy taką rodzinę $(k-1)$ -separacji \mathcal{T} grafu G , dla której spełnione są warunki

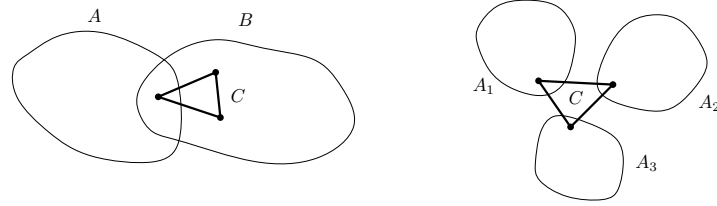
- (T1) $(A, B) \in \mathcal{T}$ lub $(B, A) \in \mathcal{T}$ dla dowolnej $(k-1)$ -separacji (A, B) grafu G ;
- (T2) jeśli $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}$, to $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$;
- (T3) $V(A) \neq V(G)$ dla każdej $(A, B) \in \mathcal{T}$.

Dla dowolnej separacji (A, B) w splątaniu mówimy, że A jest *małą stroną*, a B jest *dużą stroną* separacji w splątaniu. Maksymalny rząd splątania w grafie G oznaczamy przez $\text{tn}(G)$.

Przykład 6.1. Niech G będzie grafem i C cyklem w G . Niech \mathcal{T} będzie zbiorem wszystkich 1-separacji (A, B) grafu G takich, że $C \subseteq B$. Wtedy \mathcal{T} jest splątaniem rzędu 2 w G .

Rzeczywiście, rodzina \mathcal{T} spełnia warunek (T1) gdyż każda 1-separacja G zawiera dowolny cykl w G w jednej z dwu stron. Warunek (T3) jest również spełniony ponieważ $|V(C) \cap V(A)| \leq 1$ dla dowolnej $(A, B) \in \mathcal{T}$. Warunek (T2) zachodzi gdyż $E(C) \cap E(A) = \emptyset$ dla dowolnej $(A, B) \in \mathcal{T}$ a więc suma nawet siedemnastu małych stron nie da całego grafu. Uwaga: może się zdarzyć, że $V(A_1) \cup V(A_2) \cup V(A_3) = V(G)$ dla pewnych $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}$, patrz Rysunek 14. Ale to nie przeszkadza rodzinie \mathcal{T} być splątaniem.

Przykład 6.2. Niech G będzie grafem i $X \subseteq V(G)$ zbiorem wierzchołków takich, że $G[X]$ jest kliką. Dla każdej (A, B) separacji G mamy: $X \subseteq V(A)$ lub $X \subseteq V(B)$. Niech k będzie liczbą całkowitą i $k \geq 1$. Niech \mathcal{T}_k będzie zbiorem wszystkich separacji rzędu $< k$ takich, że $X \subseteq V(B)$. Wtedy jeśli $k < \frac{2}{3}|X| + 1$, to \mathcal{T}_k jest splątaniem rzędu k w G .



RYSUNEK 14. Po lewej: cykl zawsze zawiera się w którejś części 1-separacji. Po prawej: trzy małe strony sumują się wierzchołkowo do całego grafu.

Ustalmy liczbę całkowitą k taką, że $1 \leq k < \frac{2}{3}|X| + 1$. Rodzina \mathcal{T}_k spełnia (T1) gdyż każda separacja G musi zostawić wierzchołki kliky po tej samej stronie. Warunek (T3) jest również spełniony ponieważ $|X \cap V(A)| < \frac{2}{3}|X|$ dla dowolnej $(A, B) \in \mathcal{T}$. Rozważmy warunek (T2). Rozważmy dowolne trzy separacje $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}_k$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = G$. Ponieważ rząd tych separacji jest mniejszy od $\frac{2}{3}|X|$ zawsze znajdziemy wierzchołek $x \in X$ taki, że x należy do co najwyżej jednego zbioru spośród $V(A_1), V(A_2)$ i $V(A_3)$, powiedzmy $V(A_1)$. Wtedy jednak wszystkie krawędzie z x do pozostałych wierzchołków w X mogą znaleźć się jedynie w A_1 i nie mogą być w A_2 , ani A_3 . Ponieważ $|V(A_1) \cap X| < \frac{2}{3}|X|$, otrzymujemy sprzeczność. Zatem $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$ i warunek (T2) zachodzi.

Ćwiczenie. Rozważyć rodzinę \mathcal{T} takich $(k - 1)$ -separacji (A, B) grafu \boxplus_k , że B zawiera wiersz \boxplus_k . Wykazać, że \mathcal{T} jest splątaniem rzędu k w \boxplus_k .

Pozostawiamy jako ćwiczenia wykazanie pożytecznych obserwacji w prowadzeniu arytmetyki na separacjach w splątaniu.

Ćwiczenie (submodularność rzędu separacji). Jeśli (A_1, B_1) i (A_2, B_2) są separacjami w grafie G , to również $(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2)$ oraz $(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2)$ są separacjami w G . Ponadto,

$$\text{ord}(A_1 \cap A_2, B_1 \cup B_2) + \text{ord}(A_1 \cup A_2, B_1 \cap B_2) \leq \text{ord}(A_1, B_1) + \text{ord}(A_2, B_2).$$

Ćwiczenie. Niech \mathcal{T} będzie splątaniem rzędu $k \geq 1$ grafu G oraz niech (A, B) i (A', B') będą dwoma $(k - 1)$ -separacjami grafu G . Wykazać, że

- (1) jeśli $|V(A)| < k$, to $(A, B) \in \mathcal{T}$;
- (2) jeśli $(A, B) \in \mathcal{T}$ oraz $B \subseteq B'$, to $(A', B') \in \mathcal{T}$;
- (3) jeśli $(A, B), (A', B') \in \mathcal{T}$ oraz $\text{ord}(A \cup A', B \cap B') < k$, to $(A \cup A', B \cap B') \in \mathcal{T}$.
- (4) jeśli $k \geq 2$ oraz separacje (A, B) i (A', B') różnią się jedynie na wierzchołkach izolowanych w G , to $(A, B) \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy gdy $(A', B') \in \mathcal{T}$;
- (5) jeśli $k \geq 3$ oraz $V(A) = V(A')$ i $V(B) = V(B')$, to $(A, B) \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(A', B') \in \mathcal{T}$.

6.1. Dualność z dekompozycją gałęziową.

Lemat 6.3. Dla dowolnego grafu G o co najmniej dwu krawędziach i takiego, że $\text{tn}(G) \geq 3$ mamy

$$\text{bw}(G) \geq \text{tn}(G).$$

Dowód. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że graf G ma splątanie \mathcal{T} rzędu większego niż k oraz dekompozycję gałęziową (T, θ) o szerokości co najwyżej k . Ustalmy dowolny liść r w drzewie T . Opiszemy teraz orientację krawędzi w drzewie T . Rozważ dowolną krawędź $\xi = t_1 t_2$ w T . Krawędź ta indukuje k -separację $(G_{\xi, t_1}, G_{\xi, t_2})$ grafu G bez izolowanych wierzchołków. Jeśli r i t_i są w tej samej spójnej składowej $T - \xi$, to dorzucamy izolowane wierzchołki G do G_{ξ, t_i} , dla $i \in \{1, 2\}$. W ten sposób $(G_{\xi, t_1}, G_{\xi, t_2})$ jest k -separacją grafu G . Zatem $(G_{\xi, t_1}, G_{\xi, t_2}) \in \mathcal{T}$ albo $(G_{\xi, t_2}, G_{\xi, t_1}) \in \mathcal{T}$. Orientujemy krawędź ξ w stronę wierzchołka indeksującego dużą część w \mathcal{T} .

Rozważmy wierzchołek t w T będący ujściem naszej orientacji. Jeśli t jest liściem to niech $\xi = tt'$ będzie jedyną krawędzią styczną do t w T . Wtedy $(G_{\xi, t'}, G_{\xi, t}) \in \mathcal{T}$. Jednak $G_{\xi, t}$ jest grafem z dokładnie jedną krawędzią i z być może dorzucenymi wierzchołkami izolowanymi. To prowadzi do sprzeczności, dzięki pierwszym dwu punktom ćwiczenia powyżej.

Jeśli t jest wierzchołkiem wewnętrznym w T , to jest incydentny z dokładnie trzema krawędziami tt_1 , tt_2 i tt_3 w T . Te krawędzie indukują separacje (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , $(A_3, B_3) \in \mathcal{T}$. Rozważ dowolną krawędź $e \in E(G)$ i niech $t' = \theta(e)$. Dla dokładnie jednej wartości $i \in \{1, 2, 3\}$ mamy, że t' i t_i leżą w tym samym komponencie $T - tt_i$. Wtedy $e \in A_i$. Zatem $E(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = E(G)$. Podobnie z wierzchołkami, przy czym wszystkie wierzchołki izolowane w G są w tym grafie A_i dla którego r i t_i znajduje się razem w komponencie $T - tt_i$. Zatem $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = G$ co stoi w sprzeczności z założeniem, że \mathcal{T} jest splątaniem w G . \square

Lemat 6.4. *Dla dowolnego grafu G spełniającego $\text{bw}(G) \geq 3$ zachodzi*

$$\text{tn}(G) \geq \frac{1}{3}(\text{bw}(G) - 1).$$

Dowód. Na mocy lematu 5.7, w G istnieje zbiór wysoce spójny o mocy $\text{bw}(G) - 1$. Ustalmy taki zbiór X . Niech \mathcal{T} będzie rodziną wszystkich $\lceil |X|/3 \rceil - 1$ separacji (G_1, G_2) grafu G o tej własności, że $|V(G_1) \cap X| \leq |V(G_2) \cap X|$. Wystarczy teraz pokazać, że \mathcal{T} jest splątaniem rzędu $\lceil |X|/3 \rceil$. Warunek (T1) jest oczywiście spełniony. Zauważmy, że dla dowolnej separacji $(G_1, G_2) \in \mathcal{T}$, skoro X jest wysoce spójny i $|V(G_1) \cap X| \leq |V(G_2) \cap X|$, to istnieje $|V(G_1) \cap X|$ rozłącznych ścieżek między zbiorami $V(G_1) \cap X$ i $V(G_2) \cap X$. Jednak liczba tych ścieżek jest nie większa niż rząd separacji (G_1, G_2) , a więc $|V(G_1) \cap X| < |X|/3$. Stąd każda mała strona zawiera mniej niż $|X|/3$ wierzchołków z X , co implikuje własności (T2) i (T3). \square

Tak naprawdę zachodzi równość między dwoma rozważanymi parametrami.

Twierdzenie 6.5 (o dualności szerokości gałęziowej). *Dla dowolnego grafu G , jeśli $\text{bw}(G) \geq 2$, to*

$$\text{tn}(G) = \text{bw}(G).$$

Mogłoby się wydawać, że owa dualność jest powodem dla którego splątania są ważne. Nic bardziej mylnego. Dla wszystkich kolejnych twierdzeń wystarczy nam związanienie tn i bw jakie mamy dzięki dwóm poprzednim prostym lematom. Splątania są ważne, gdyż możemy je rozplątać :) Twierdzenie o drzewie splątań daje zasadniczo

nam strukturę drzewa pracującą w strukturalnym twierdzeniu o grafach. Niektórzy uważają, że splątanie jest fajne bo daje nam w naturalny sposób strukturę matroidu. . .

6.2. Matroid ze splątania. Niech k będzie liczbą całkowitą i $k \geq 1$. Ustalmy splątanie \mathcal{T} rzędu k w grafie G . Dla każdego zbioru wierzchołków $X \subseteq V(G)$ definiujemy wartość $\kappa(X)$ jako minimalny rząd separacji $(A, B) \in \mathcal{T}$ takiej, że $X \subseteq V(A)$, lub jako k jeżeli nie istnieje taka separacja. Tak zdefiniowana funkcja spełnia aksjomaty *funkcji rangi*, to znaczy:

- ($\kappa 1$) $\kappa(\emptyset) = 0$,
- ($\kappa 2$) $\kappa(X) \leq \kappa(X \cup \{x\}) \leq \kappa(X) + 1$ dla dowolnych $X \subseteq V(G)$, $x \in V(G)$,
- ($\kappa 3$) $\kappa(X \cap Y) + \kappa(X \cup Y) \leq \kappa(X) + \kappa(Y)$ dla dowolnych $X, Y \subseteq V(G)$.

Rzeczywiście, ($\kappa 1$) zachodzi bo $(\emptyset, G) \in \mathcal{T}$. Pierwsza nierówność w ($\kappa 2$) zachodzi bo jeśli $(A, B) \in \mathcal{T}$ oraz $X \cup \{x\} \subseteq V(A)$, to oczywiście $X \subseteq V(A)$. W dowodzie drugiej nierówności w ($\kappa 2$) możemy założyć, że $\kappa(X) \leq k - 2$ (w przeciwnym razie nierówność jest oczywista). Niech $(A, B) \in \mathcal{T}$ będzie taką separacją, że $X \subseteq V(A)$ i $\text{ord}(A, B) = \kappa(X)$. Wówczas

$$\kappa(X \cup \{x\}) \leq \text{ord}(A + x, B) \leq \text{ord}(A, B) + 1 = \kappa(X) + 1.$$

Dla dowodu ($\kappa 3$), jeśli $\kappa(X) = k$ lub $\kappa(Y) = k$, to łatwo widać, że ($\kappa 3$) zachodzi. W przeciwnym przypadku, niech (A, B) i (C, D) będą takimi separacjami z \mathcal{T} , że $X \subseteq V(A)$, $Y \subseteq V(C)$ oraz $\kappa(X) = \text{ord}(A, B)$ i $\kappa(Y) = \text{ord}(C, D)$. Wówczas $X \cap Y \subseteq V(A \cap C)$ i $X \cup Y \subseteq V(A \cup C)$, więc

$$\begin{aligned} \kappa(X \cap Y) + \kappa(X \cup Y) &\leq \text{ord}(A \cap C, B \cup D) + \text{ord}(A \cup C, B \cap D) \\ &= \text{ord}(A, B) + \text{ord}(C, D) \\ &= \kappa(X) + \kappa(Y). \end{aligned}$$

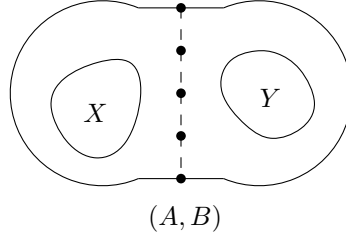
Mówimy, że zbiór $X \subseteq V(G)$ jest \mathcal{T} -niezależny, jeżeli $\kappa(X) = |X|$.

Obserwacja 6.6 (własności zbiorów niezależnych). *Niech \mathcal{T} będzie splątaniem w grafie G . Wtedy*

- \emptyset jest \mathcal{T} -niezależny,
- podzbiór zbioru \mathcal{T} -niezależnego jest \mathcal{T} -niezależny,
- dla dowolnych dwóch zbiorów \mathcal{T} -niezależnych $X, Y \subseteq V(G)$, jeśli $|X| < |Y|$, to istnieje $y \in Y - X$ taki, że $X \cup \{y\}$ jest \mathcal{T} -niezależny.

Lemat 6.7. *Niech \mathcal{T} będzie splątaniem w grafie G . Dla dowolnych dwóch zbiorów \mathcal{T} -niezależnych $X, Y \subseteq V(G)$ istnieje $t = \min(|X|, |Y|)$ rozłącznych X - Y ścieżek.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że nie istnieje t rozłącznych X - Y ścieżek. Wówczas na mocy twierdzenia Mengersa istnieje separacja (A, B) taka, że $\text{ord}(A, B) < t \leq k$ oraz $X \subseteq V(A)$ i $Y \subseteq V(B)$. Patrz rysunek 15. Zatem $(A, B) \in \mathcal{T}$ lub $(B, A) \in \mathcal{T}$. Jeśli A jest małą stroną w \mathcal{T} , to mielibyśmy $\kappa(X) < t \leq |X| = \kappa(X)$, sprzeczność. Jeśli B jest małą stroną w \mathcal{T} , to mielibyśmy $\kappa(Y) < t \leq |Y| = \kappa(Y)$, sprzeczność. \square



RYSUNEK 15. Gdzie jest mała strona separacji $\{A, B\}$ w \mathcal{T} ?

Wniosek 6.8. Niech \mathcal{T} będzie splątaniem w grafie G . Wtedy każdy zbiór \mathcal{T} -niezależny jest wysoce spójny w G .

Zbiór $X \subseteq V(G)$ jest \mathcal{T} -domknięty, jeżeli dla dowolnego $x \in V(G) - X$ zachodzi $\kappa(X \cup \{x\}) > \kappa(X)$. Jeśli Y_1 i Y_2 są takimi nadzbiórami zbioru X , że $\kappa(Y_1) = \kappa(Y_2) = \kappa(X)$, to

$$\kappa(X) + \kappa(Y_1 \cup Y_2) = \kappa(Y_1 \cap Y_2) + \kappa(Y_1 \cup Y_2) \leq \kappa(Y_1) + \kappa(Y_2) = 2\kappa(X),$$

a więc również $\kappa(Y_1 \cup Y_2) = \kappa(X)$. Stąd dla każdego zbioru $X \subseteq V(G)$ istnieje dokładnie jeden zbiór \mathcal{T} -domknięty Y taki, że $X \subseteq Y \subseteq V(G)$ oraz $\kappa(Y) = \kappa(X)$. Zbiór ten nazywamy \mathcal{T} -domknięciem zbioru X .

Lemat 6.9. Niech \mathcal{T} będzie splątaniem w G . Niech $(A, B) \in \mathcal{T}$ i niech $X = V(A) \cap V(B)$. Jeśli $V(A)$ jest \mathcal{T} -domknięty i $\kappa(V(A)) = |X|$, to X jest wysoce spójny w B .

Dowód. Załóżmy dla dowodu nie wprost, że X nie jest wysoce spójny w B . Wtedy mamy podzbiory X_1, X_2 zbioru X takie, że $X = X_1 \cup X_2$ dla których nie istnieje $t = \min(|X_1|, |X_2|)$ rozłącznych X_1 - X_2 ścieżek w B . Z twierdzenia Mengersa istnieje separacja (B_1, B_2) grafu B taka, że $X_1 \subseteq V(B_1)$, $X_2 \subseteq V(B_2)$ oraz $\text{ord}(B_1, B_2) < t$. Rozważmy separacje $(A \cup B_2, B_1)$ oraz $(A \cup B_1, B_2)$. Ponieważ $V(A \cup B_2) \cap V(B_1) \subseteq X \setminus X_2 \cup V(B_1 \cap B_2)$ mamy $\text{ord}(A \cup B_2, B_1) \leq |X| - t + \text{ord}(B_1, B_2) < |X|$. Analogicznie mamy $\text{ord}(A \cup B_1, B_2) < |X|$. Ponieważ $V(A)$ jest \mathcal{T} -domknięty i $\kappa(V(A)) = |X|$ wnioskujemy, że $(A \cup B_2, B_1) \notin \mathcal{T}$ i $(A \cup B_1, B_2) \notin \mathcal{T}$. A zatem $(B_1, A \cup B_2) \in \mathcal{T}$ i $(B_2, A \cup B_1) \in \mathcal{T}$. To jednak prowadzi do sprzeczności bo trzy małe strony w \mathcal{T} sumują się do całego grafu: $A \cup B_1 \cup B_2 = G$. Ta sprzeczność zamyka dowód lematu. \square

Przypomnijmy, że model ϕ grafu H w grafie G jest *ukorzeniony* w zbiorze $X \subseteq V(G)$ jeśli $|V(\phi(t)) \cap X| = 1$ dla każdego $t \in V(H)$.

Lemat 6.10 (o modelu lasu po małej stronie separacji w splątaniu). Niech G będzie grafem, a \mathcal{T} splątaniem w G o rzędzie większym niż k . Niech F będzie lasem na k wierzchołkach. Wtedy istnieje separacja $(A, B) \in \mathcal{T}$ taka, że

- (i) zbiór $V(A)$ jest \mathcal{T} -domknięty i $\kappa(V(A)) = \text{ord}(A, B) = k$ oraz
- (ii) A zawiera model lasu F ukorzeniony w $V(A) \cap V(B)$.

Dowód. Niech (v_1, \dots, v_k) będzie takim uporządkowaniem wierzchołków lasu F , że dla każdego $i \in \{1, \dots, k-1\}$, wierzchołek v_{i+1} sąsiaduje z co najwyżej jednym wierzchołkiem ze zbioru $\{v_1, \dots, v_i\}$. Indukcyjnie dla każdego $i \in \{0, \dots, k\}$ pokażemy, że istnieje taka separacja $(A^i, B^i) \in \mathcal{T}$ oraz taki model ϕ^i lasu $F[\{v_1, \dots, v_i\}]$ w grafie A^i , że

- (i) zbiór $V(A^i)$ jest \mathcal{T} -domknięty i $\kappa(V(A^i)) = \text{ord}(A^i, B^i) = i$ oraz
- (ii) model ϕ^i jest ukorzeniony w $V(A^i) \cap V(B^i)$.

Dla $i = 0$ jako A^0 bierzemy podgraf G indukowany przez \mathcal{T} -domknięcie zbioru pustego, a jako B^0 bierzemy $G - A^0$. Załóżmy, że dla pewnego $i \in \{0, \dots, k-1\}$ zdefiniowaliśmy już (A^i, B^i) oraz ϕ^i . Z faktu, że $\kappa(V(A^i)) = \text{ord}(A^i, B^i) = i$ wynika, że każdy wierzchołek z $V(A^i) \cap V(B^i)$ sąsiaduje z wierzchołkiem w $V(B^i) \setminus V(A^i)$. Niech $x \in V(B^i) \setminus V(A^i)$ będzie takim wierzchołkiem, że jeśli v_{i+1} sąsiaduje z wierzchołkiem v_j dla pewnego $j < i+1$, to x jest sąsiadem jedynego wierzchołka w zbiorze $V(\phi^i(v_j)) \cap V(A^i) \cap V(B^i)$. Skoro zbiór $V(A^i)$ jest \mathcal{T} -domknięty, mamy $\kappa(V(A^i) \cup \{x\}) = i+1$. Weźmy jako (A^{i+1}, B^{i+1}) taką separację z \mathcal{T} , że A^{i+1} jest grafem indukowanym przez \mathcal{T} -domknięcie zbioru $V(A^i) \cup \{x\}$, a B^{i+1} jest podgrafem G indukowanym przez te wierzchołki i krawędzie które nie należą do A^{i+1} . W szczególności mamy $\text{ord}(A^{i+1}, B^{i+1}) = i+1$. Zauważmy, że w A^{i+1} istnieje $i+1$ rozłącznych $(V(A^i) \cup \{x\})$ - $V(B^{i+1})$ ścieżek. Istotnie, w przeciwnym razie istniałaby taka i -separacja (C, D) grafu A^{i+1} , że $V(A^i) \cup \{x\} \subseteq V(C)$ i $V(A^{i+1} \cap B^{i+1}) \subseteq V(D)$. Z domkniętości $V(A^i)$ mielibyśmy $(C, D \cup B^{i+1}) \notin \mathcal{T}$ czyli $D \cup B^{i+1}$ byłby małą stroną w splątaniu, a graf G byłby sumą dwóch małych stron $D \cup B^{i+1}$ i A^{i+1} w \mathcal{T} . Niech więc P_1, \dots, P_{i+1} będą takimi rozłącznymi $(V(A^i) \cup \{x\})$ - B^{i+1} ścieżkami, że P_j ma koniec w jedynym wierzchołku zbioru $V(\phi^i(v_j)) \cap V(A^i) \cap V(B^i)$ dla $1 \leq j \leq i$, zaś P_{i+1} ma koniec w x . Wówczas żądany model ϕ^{i+1} możemy zdefiniować jak następuje.

$$\phi^{i+1}(v_j) = \begin{cases} \phi^i(v_j) \cup P_j & \text{jeśli } 1 \leq j \leq i \\ P_{i+1} & \text{jeśli } j = i+1. \end{cases}$$

To kończy dowód indukcyjny oraz dowód lematu. □

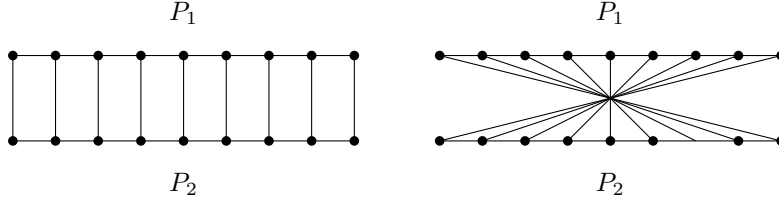
Powyższy lemat jest jednym z elementów dowodu twierdzenia o kracie. Twierdzenie o kracie mówi, że jeśli graf ma splątanie dużego rzędu to zawiera minor dużej kraty. My na razie pokażemy szybko, że taki graf zawiera minor dużej drabiny.

Twierdzenie 6.11 (Erdős-Szekeres 1935). *Każdy ciąg liczb całkowitych długości co najmniej $(k-1)^2 + 1$ zawiera słabo rosnący lub słabo malejący podciąg długości k .*

Wniosek 6.12. *Jeżeli $\text{tn}(G) > 2((k-1)^2 + 1)$, to krata $2 \times k$ jest minorem grafu G .*

Dowód. Korzystamy z lematu 6.10 dla grafu G , splątania w G rzędu większego niż $2((k-1)^2 + 1)$ oraz T będącego ścieżką na $2((k-1)^2 + 1)$ wierzchołkach. Otrzymujemy separację (A, B) grafu G oraz odpowiedni model P w A . Po skonstruowaniu worków z modelu i usunięciu zbędnych wierzchołków i krawędzi możemy założyć, że $V(P) = V(A) \subseteq V(B)$. Ścieżka P zawiera dwie rozłączne ścieżki P_1 i P_2 , każda długości $(k-1)^2 + 1$. Zbiór $V(P)$ jest wysoce spójny w B , więc istnieje $(k-1)^2 + 1$ rozłącznych

$V(P_1)$ - $V(P_2)$ ścieżek. Ścieżki te definiują pełne skojarzenie między wierzchołkami ścieżek P_1 i P_2 . Na mocy twierdzenia Erdősa-Szekeresa znajdziemy k wierzchołków na ścieżce P_1 takich, że odpowiadające im wierzchołki na P_2 albo leżą w tej samej kolejności, albo w przeciwnej. W obu przypadkach otrzymujemy kratę $2 \times k$ jako minor grafu G , patrz rysunek 16. \square



RYSUNEK 16. Dwa warianty połączeń pomiędzy P_1 i P_2 otrzymane z twierdzenia Erdősa-Szekeresa. Oba indukują drabinę.

Wymuszenie dużej drabiny pozwala nam szybko udowodnić twierdzenie Erdősa-Pósy. Konstrukcja argumentu znana jest jako „tangle trick”.

Twierdzenie 6.13 (Erdős-Pósa 1965). *Istnieje taka funkcja f , że dla dowolnego grafu G i dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$*

- (i) G ma k rozłącznych cykli lub
- (ii) istnieje zbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leq f(k)$ oraz $G - X$ jest lasem.

Dowód. Niech $f(1) = 0$ oraz $f(k) = 24k^2 + 2f(k-1)$ dla $k \geq 2$. Rozważmy dowolny graf G . Oczywiście teza zachodzi dla $k = 1$ bo jeśli G nie ma cyklu to jest lasem więc wystarczy wziąć $X = \emptyset$. Załóżmy, że teza nie zachodzi dla pewnego $k > 1$ i weźmy najmniejsze takie k . Niech \mathcal{T} będzie rodziną wszystkich takich $(8k^2)$ -separacji (A, B) grafu G , że $A - V(B)$ jest lasem. Wykażemy, że \mathcal{T} jest splątaniem G rzędu $8k^2 + 1$.

Rozważmy dowolną $(8k^2)$ -separację (A, B) grafu G . Jeśli $(A, B) \notin \mathcal{T}$ i $(B, A) \notin \mathcal{T}$, to oba grafy $A - V(B)$ i $B - V(A)$ zawierają cykl. Skoro G nie zawiera k rozłącznych cykli, to $A - V(B)$ nie zawiera $k-1$ rozłącznych cykli i tak samo $B - V(A)$ nie zawiera $k-1$ rozłącznych cykli. Z minimalności wyboru k , to oznacza, że istnieje Y podzbiór wierzchołków $A - V(B)$ taki, że $|Y| \leq f(k-1)$ oraz $A - V(B) - Y$ jest lasem. Podobnie, istnieje Z podzbiór wierzchołków $B - V(A)$ taki, że $|Z| \leq f(k-1)$ oraz $B - V(A) - Z$ jest lasem. Zatem każdy cykl w G zawiera wierzchołek z $(V(A) \cap V(B)) \cup Y \cup Z$. Ponieważ $|V(A) \cap V(B) \cup Y \cup Z| \leq 8k^2 + 2f(k-1) \leq f(k)$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że teza nie zachodzi dla rozważanego k i G . Zatem rzeczywiście $A - V(B)$ lub $B - V(A)$ jest lasem i rodzina \mathcal{T} spełnia warunek (T1).

Przyjrzyjmy się teraz warunkowi (T3). Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $(A, B) \in \mathcal{T}$ oraz $V(A) = V(G)$. Ponieważ (A, B) jest $(8k^2)$ -separacją G wnioskujemy, że $|V(B)| \leq 8k^2$. To oznacza, że po usunięciu co najwyżej $8k^2 \leq f(k)$ wierzchołków z G otrzymujemy las, sprzeczność. Zatem rodzina \mathcal{T} zachowuje (T3).

Rozważmy teraz trzy separacje $(A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) \in \mathcal{T}$ i założmy dla dowodu nie wprost, że $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = G$. Niech $X_i = V(A_i) \cap V(B_i)$ dla $i \in \{1, 2, 3\}$. Wtedy twierdzimy, że $G - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ jest lasem. Rzeczywiście, jeśli ten graf miałby cykl, to taki cykl musiałby się całkowicie zawierać w $A_i - V(B_i)$ dla pewnego $i \in \{1, 2, 3\}$. To jest sprzeczność z faktem, że $A - V(B_i)$ jest lasem. A zatem $G - (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ jest lasem. Ponieważ $|X_1| + |X_2| + |X_3| \leq 24k^2 \leq f(k)$, otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że teza nie zachodzi dla rozważanego k i G . A zatem $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$ i rodzina \mathcal{T} spełnia (T2). To kończy dowód, że \mathcal{T} jest splątaniem w G rzędu $8k^2 + 1$.

Ponieważ $\text{tn}(G) > 8k^2 \geq 2((2k - 1)^2 + 1)$, z wniosku 6.2 dostajemy, że G zawiera minor kraty $2 \times 2k$. Taka krata zawiera k rozłącznych cykli. Zatem G zawiera k rozłącznych cykli co daje nam ostateczną sprzeczność z założeniem nie wprost. \square

7. TWIERDZENIE O KRACIE

Wiemy już, że grafy o dużej szerokości drzewiastej mają splątania dużego rzędu, co uzasadnia poniższe przeformułowanie wypowiedzi twierdzenia o kracie.

Twierdzenie 7.1 (o kracie). *Istnieje taka funkcja f , że dla każdego grafu G , dla każdej liczby naturalnej n zachodzi*

$$\text{tn}(G) \geq f(n) \implies \boxplus_n \preceq G.$$

Niech $m = n^2$. Wykażemy, że wystarczy wziąć $f(n) = m \cdot \left[\binom{m}{2} \cdot 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \right]^{\binom{m}{2}}$. Zauważ, że

$$\begin{aligned} m \cdot \left[\binom{m}{2} \cdot 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \right]^{\binom{m}{2}} &\leq n^2 \cdot \left[n^4 \cdot 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \right]^{n^4} = n^2 \cdot \left[12n^{2n+8} \right]^{n^4} \\ &= 2^{\mathcal{O}(\log n^2 + n^4(2n+8) \log n)} \\ &= 2^{\mathcal{O}(n^5 \log n)}. \end{aligned}$$

Obecnie znane są wielomianowe ograniczenia na funkcję f w twierdzeniu o kracie. Pierwsze wielomianowe ograniczenie podali Chandra Chekuri i Julia Chuzhoy w 2016 roku. Aktualnie najlepsze znane ograniczenie to $f(n) = \mathcal{O}(n^9 \text{poly } \log n)$. Wiadomo też, że $f(n) = \Omega(n^2 \log n)$.

My podamy starszy i krótszy dowód, którego główny kombinatoryczny krok zamyka się w następującym lemacie. Dla grafu G i $X, Y \subseteq V(G)$ niech $\kappa_G(X, Y)$ będzie maksymalną liczbą rozłącznych X - Y ścieżek w G .

Lemat 7.2 (Diestel, Gorbunov, Jensen, Thomassen 1999). *Niech n i t będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Niech H będzie grafem, a X i Y takimi podzbiórami wierzchołków w H , że $\kappa_H(X, Y) \geq 3n^2 \cdot t$. Wtedy, jeśli \mathcal{P} jest rodziną $4n^{2n+2} \cdot 3n^2 \cdot t$ rozłącznych ścieżek w H , to*

$$\text{istnieje } P \in \mathcal{P}, \text{ że } \kappa_{H-P}(X, Y) \geq t \quad \text{lub} \quad \boxplus_n \preceq H.$$

Dowód twierdzenia 7.1 przy założeniu lematu 7.2. Rozważmy graf G ze splątaniem \mathcal{T} rzędu większego niż $x := m \cdot \left[\binom{m}{2} \cdot 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \right]^{\binom{m}{2}}$. Z lematu 6.10 dostajemy separację $(A, B) \in \mathcal{T}$ grafu G taką, że $V(A)$ jest \mathcal{T} -domknięty, $\kappa(V(A)) = |V(A) \cap V(B)|$ oraz model ścieżki na x wierzchołkach w A ukorzeniony w $V(A) \cap V(B)$. Kontraktujemy worki modelu i wierzchołki otrzymanej ścieżki utożsamiamy z wierzchołkami $V(A) \cap V(B)$.

Otrzymaną ścieżkę dzielimy na m rozłącznych ścieżek, każdą na $\left[\binom{m}{2} \cdot 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \right]^{\binom{m}{2}}$ wierzchołkach. Niech A_1, \dots, A_m będą zbiorami wierzchołków tych ścieżek. Z lematu 6.9 wiemy, że $V(A) \cap V(B)$ jest wysoce spójny w B , zatem dla dowolnych różnych $p, q \in \{1, \dots, m\}$

- (1) istnieje $\left[\binom{m}{2} \cdot 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \right]^{\binom{m}{2}}$ rozłącznych A_p - A_q ścieżek w B ,
które nie mają wierzchołków wewnętrznych w $V(A)$.

Strategia dowodu jest następująca: spróbujemy skonstruować model K_m w grafie G . Każda ścieżka będzie odpowiadać jednemu workowi modelu. Główną trudnością będzie zbudowanie rodziny rozłącznych ścieżek łączących A_p z A_q dla dowolnych różnych $p, q \in \{1, \dots, m\}$. Jeżeli to się uda, to $\boxplus_n \preceq K_m \preceq G$. Jeżeli konstrukcja się nie uda (bo rodziny ścieżek gwarantowane przez wysoką spójność naszych zbiorów się za bardzo przecinają), to dostaniemy na pocieszenie model \boxplus_n w G .

Niech $\sigma : \{pq \mid 1 \leq p < q \leq m\} \rightarrow \{0, \dots, \binom{m}{2} - 1\}$ będzie dowolną bijekcją porządkującą liniowo krawędzie klikki na zbiorze $\{1, \dots, m\}$. Opiszemy konstrukcję rozłącznych ścieżek $P_0, \dots, P_{\binom{m}{2}-1}$ takich, że P_ℓ jest A_p - A_q ścieżką dla $pq = \sigma^{-1}(\ell)$, oraz P_ℓ nie ma wierzchołków wewnętrznych w $V(A)$. Zakładając, że mamy skonstruowane pierwsze ℓ ścieżek dla $\ell \in \{0, \dots, \binom{m}{2} - 1\}$, dla każdego $p, q \in \{1, \dots, m\}$ takiego, że $\sigma(pq) \geq \ell$ będzie zachowany warunek:

- (2) istnieje $f(\ell) := \left[\binom{m}{2} \cdot 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \right]^{\binom{m}{2}-\ell}$ rozłącznych A_p - A_q ścieżek
w $B - \cup_{i < \ell} P_i$, które nie mają wierzchołków wewnętrznych w $V(A)$.

Konstrukcję rozpoczynamy obserwując, że dla $\ell = 0$ niezmiennik jest zachowany dzięki (1). Przyjmijmy, że $0 \leq j < \binom{m}{2}$, że pierwsze j ścieżek jest zdefiniowanych i że niezmiennik (2) dla $\ell = j$ jest zachowany. Rozważmy takie pq , że $\sigma(pq) = j$. Niech \mathcal{P} będzie rodziną $f(j)$ rozłącznych A_p - A_q ścieżek w $B - \cup_{i < j} P_i$, które nie mają wierzchołków wewnętrznych w $V(A)$. Istnienie tej rodziny jest zagwarantowane przez (2). Jeśli istnieje $P \in \mathcal{P}$ takie, że przyjmując $P_j = P$ niezmiennik (2) jest zachowany dla $\ell = j + 1$ i wszystkich pq takich, że $\sigma(pq) > \ell$, to definiujemy $P_j = P$ i przechodzimy do następnego kroku. Załóżmy zatem, że dla każdej ścieżki $P \in \mathcal{P}$ istnieje $p'q'$ takie, że $\sigma(p'q') > j$ i warunek (2) nie jest spełniony. Ponieważ każda ścieżka $P \in \mathcal{P}$ ma co najwyżej $\binom{m}{2}$ możliwych wyborów $p'q'$ z zasady szufladkowej

ustalamy rodzinę $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ oraz $p'q'$ takie, że $\sigma(p'q') > j$,

$$|\mathcal{P}'| \geq f(j) / \binom{m}{2} \geq 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \cdot f(j+1),$$

oraz dla każdej ścieżki $P \in \mathcal{P}'$ nie istnieje rodzina $f(j+1)$ rozłącznych $A_{p'}-A_{q'}$ ścieżek w $B - (P \cup \bigcup_{i < j} P_i)$, które nie mają wierzchołków wewnętrznych w $V(A)$.

Mamy już wszystko przygotowane do zastosowania lematu 7.2. Niech H będzie grafem $(B - \bigcup_{i < j} P_i) - (V(A) \setminus (A_{p'} \cup A_{q'}))$. Niech $t = f(j+1)$, $X = A_{p'}$ i $Y = A_{q'}$. Wtedy rzeczywiście mamy

$$\kappa_H(X, Y) \geq f(j) \geq 3n^2 \cdot f(j+1) = 3n^2 \cdot t.$$

Lemat zastosujemy do rodziny $\mathcal{P}'' = \{P \cap H \mid P \in \mathcal{P}'\}$. Zauważmy, że każdy jej element $P \cap H$ jest podgrafem grafu P otrzymanym przez usunięcie jednego lub dwóch z jej końców. Ponadto, skoro $\kappa_H(X, Y) \geq 3n^2 t$ i $\kappa_{H-P}(X, Y) < t$, mamy $P \cap H \neq \emptyset$. Skoro więc ścieżki w \mathcal{P}' są parami rozłączne, to \mathcal{P}'' jest rodziną rozłącznych ścieżek w H spełniającą

$$|\mathcal{P}''| \geq 3n^2 \cdot 4n^{2n+2} \cdot t.$$

Stosując lemat 7.2 otrzymujemy alternatywę z jego tezy ale ponieważ już wiemy, że dla każdej ścieżki $P \in \mathcal{P}''$ mamy $\kappa_{H-P}(X, Y) < t$, wnioskujemy, że $\boxplus_n \preceq H \preceq B \preceq G$. \square

Dowód lematu 7.2. W przypadku gdy $n = 1$, teza jest oczywista. Dla $n \geq 2$, lemat dowodzimy indukcyjnie względem liczby krawędzi w grafie. Ustalmy graf H i założmy, że teza jest prawdziwa dla każdego grafu mającego mniej niż $|E(H)|$ krawędzi. Niech

$$\ell = 3n^2 t, \quad d = n^{2n+2} \quad \text{oraz} \quad k = 4\ell d.$$

Weźmy takie podzbiory wierzchołków X i Y w H , że $\kappa_H(X, Y) \geq \ell$ i niech \mathcal{P} będzie rodziną k rozłącznych ścieżek w H . Zakładamy, że $\kappa_{H-P}(X, Y) < t$ dla każdej $P \in \mathcal{P}$ i udowodnimy, że $\boxplus_n \preceq H$. Niech \mathcal{Q} będzie rodziną ℓ rozłącznych X - Y ścieżek w H . Wówczas, dla każdej ścieżki $P \in \mathcal{P}$, skoro $\kappa_{H-P}(X, Y) < t$, to \mathcal{Q} ma mniej niż t ścieżek rozłącznych z P . To oznacza, że istnieje mniej niż kt takich par ścieżek $(P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$, że $V(P) \cap V(Q) = \emptyset$. Stąd liczba ścieżek z \mathcal{Q} które są rozłączne z więcej niż $k/(2n^2)$ ścieżkami z \mathcal{P} wynosi mniej niż $(kt)/(k/(2n^2)) = 2n^2 t$. Skoro $|\mathcal{Q}| = 3n^2 t \geq 2n^2 t + n^2$, możemy wybrać taki podzbiór $\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}$, że

$$|\mathcal{Q}'| = n^2$$

oraz istnieje co najwyżej $n^2 \cdot (k/(2n^2)) = k/2$ ścieżek w \mathcal{P} , które są rozłączne z jakąkolwiek ścieżką z \mathcal{Q}' . Wybierzmy więc jeszcze taki podzbiór $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, że

$$|\mathcal{P}'| = k/2 \quad \text{i} \quad \text{każda ścieżka z } \mathcal{P}' \text{ przecina każdą ścieżkę z } \mathcal{Q}'.$$

Ustalmy dowolną ścieżkę $Q \in \mathcal{Q}'$. Ścieżka Q przecina wszystkie $|\mathcal{P}'| = k/2 = 2\ell d$ ścieżek ze zbioru \mathcal{P}' . Dla każdego $i \in \{1, \dots, d-1\}$, niech e_i będzie pierwszą taką krawędzią na ścieżce Q idącą od X do Y , że prefiks Q_i będący składową $Q - e_i$ mającą koniec w X przecina co najmniej $2\ell i$ ścieżek ze zbioru \mathcal{P}' oraz e_i nie należy do żadnej ścieżki ze zbioru \mathcal{P} . Ponadto niech Q_0 będzie pustym grafem i $Q_d = Q$. Zauważmy, że każde dwa wierzchołki na ścieżce Q , które należą do różnych ścieżek z \mathcal{P}' , są oddzielone krawędzią nie należącą do żadnej ścieżki z \mathcal{P} . Stąd każda ścieżka Q_i przecina dokładnie $2\ell i$ ścieżek ze zbioru \mathcal{P}' . Zatem krawędzie e_i dzielą ścieżkę

Q na d ścieżek $Q'_i = Q_i - Q_{i-1}$, z których każda przecina co najmniej 2ℓ ścieżek ze zbioru \mathcal{P}' .

Gdybyśmy dla którejś krawędzi e_i mieli $\kappa_{H-e_i}(X, Y) \geq \ell$, to korzystając z założenia indukcyjnego dostalibyśmy $\boxplus_n \preceq H - e_i \preceq H$. Załóżmy więc, że $\kappa_{H-e_i}(X, Y) < \ell$. Stąd z twierdzenia Menger'a dla każdego $i \in \{1, \dots, d-1\}$ istnieje zbiór S_i co najwyżej $\ell - 1$ wierzchołków separujących X i Y w $H - e_i$. Zbiór ten musi przecinać każdą ścieżkę ze zbioru $\mathcal{Q} \setminus \{Q\}$ w dokładnie jednym wierzchołku. Niech ponadto $S_0 = X \cap (\cup_{Q' \in \mathcal{Q}} V(Q')) \setminus V(Q)$ i $S_d = Y \cap (\cup_{Q' \in \mathcal{Q}} V(Q')) \setminus V(Q)$. Wówczas dla każdego $i \in \{1, \dots, d\}$ mamy $|S_{i-1} \cup S_i| \leq 2(\ell - 1) < 2\ell$. Skoro Q_i przecina co najmniej 2ℓ ścieżek z \mathcal{P}' , to możemy wybrać ścieżkę $P_i \in \mathcal{P}'$ przecinającą Q'_i , która jest rozłączna z $S_{i-1} \cup S_i$. Zauważmy, że dla dowolnych $i \in \{1, \dots, d\}$ oraz $Q' \in \mathcal{Q}'$, jedyny wierzchołek przecięcia $V(Q') \cap S_{i-1}$ musi leżeć na Q' pomiędzy jej końcem w X a wszystkimi wierzchołkami przecięcia $V(Q') \cap V(P_i)$ — jest to oczywiste dla $i = 1$, a dla $i \geq 2$ wynika to z faktu, że S_{i-1} separuje zbiory X i Y w $H - e_{i-1}$. Analogicznie wnioskujemy, że jedyny wierzchołek przecięcia $V(Q') \cap S_i$ musi leżeć na Q' pomiędzy jej końcem w Y a wszystkimi wierzchołkami przecięcia $V(Q') \cap V(P_i)$.

Dla każdego $i \in \{1, \dots, d\}$, rozważmy graf na \mathcal{Q}' , w którym Q'_1 i Q'_2 są połączone krawędzią, jeśli P_i zawiera ścieżkę o końcach Q'_1 i Q'_2 która jest poza tym rozłączna ze ścieżkami w \mathcal{Q}' . Skoro P_i przecina wszystkie ścieżki ze zbioru \mathcal{Q}' , rozważany graf jest spójny, wybierzmy zatem dowolne jego drzewo rozpinające T_i . Otrzymujemy w ten sposób $d = n^{2n+2}$ drzew T_1, \dots, T_d na n^2 elementowym zbiorze \mathcal{Q}' . Każde z tych drzew zawiera ścieżkę na n wierzchołkach lub ma co najmniej n liści. Zatem istnieje taki podzbiór co najmniej $d/2$ z tych drzew, że każde z nich zawiera ścieżkę na n wierzchołkach lub każde z nich ma co najmniej n liści.

Założmy najpierw, że $d/2$ spośród drzew T_1, \dots, T_d zawiera ścieżki na n wierzchołków. W każdym z tych drzew wyróżnijmy dowolną ścieżkę na n wierzchołków. Każda z tych ścieżek ma wszystkie wierzchołki w n^2 elementowym zbiorze \mathcal{Q}' . Liczba różnych ścieżek otrzymanych jest więc nie większa niż $(n^2)^n/2 < (d/2)/n$, zatem któreś n z tych drzew będzie zawierać tę samą ścieżkę $Q'_1 Q'_2 \dots Q'_n$. Suma ścieżek P_i odpowiadających tym n drzewom oraz ścieżek $Q'_1, Q'_2 \dots Q'_n$ zawiera \boxplus_n jako minor, więc $\boxplus_n \preceq H$.

Teraz załóżmy, że $d/2$ spośród drzew T_1, \dots, T_d ma co najmniej n liści. Dla każdego z nich wybierzmy zbiór n liści. W ten sposób możemy otrzymać co najwyżej $\binom{n^2}{n} \leq n^{2n}/n! < (d/2)/n^2$ różnych zbiorów. Istnieje więc n^2 drzew dla których wybrany jest ten sam zbiór liści $\{Q'_1, \dots, Q'_n\}$. W tym przypadku również możemy otrzymać \boxplus_n jako minor, w taki sposób, że każda ścieżka Q'_j będzie odpowiadać jednemu wierszowi kraty, a każda pionowa krawędź będzie realizowana w innym poddrzewie T_i . \square

8. TWIERDZENIE GALLAI I WŁASNOŚĆ ERDŐSA-PÓSY

Klasa grafów \mathcal{C} ma *własność Erdősa-Pósy* jeśli istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taka, że dla każdego grafu G i dla każdej liczby naturalnej k zachodzi

- (i) G ma k rozłącznych podgrafów izomorficznych do grafów w \mathcal{C} , lub
- (ii) istnieje podzbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leq f(k)$ oraz $G - X$ nie ma żadnego podgrafu izomorficznego z grafem w \mathcal{C} .

Twierdzenie Erdősa-Pósy implikuje, że klasa wszystkich cykli ma własność Erdősa-Pósy. Było i jest sporo intensywnych badań o tym które klasy mają a które nie mają własności Erdősa-Pósy. Rozważany jest krawędziowy wariant własności gdzie usuwamy krawędzie zamiast wierzchołków. Kiedy już wiadomo, że klasa ma własność Erdősa-Pósy często wyzwaniem jest wyznaczenie optymalnej asymptotycznie funkcji f . Jest też linia badań w której ogólny kwantyfiktor „dla każdego grafu G ” ma ograniczony zasięg do pewnej ustalonej klasy grafów \mathcal{G} , tzw. *host grafów*.

Interesujący wariant własności Erdősa-Pósy powstaje po zamienieniu relacji bycia podgrafem na relację bycia minorem. Dochodzimy w ten sposób do twierdzenia, które jest jednym z zadań domowych.

Twierdzenie 8.1. *Niech H będzie grafem planarnym. Istnieje taka funkcja f , że dla dowolnego grafu G i dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$*

- (i) G ma k rozłącznych podgrafów spośród których każdy ma minor izomorficzny z H lub
- (ii) istnieje zbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leq f(k)$ oraz $G - X$ nie ma minoru izomorficznego z H .

Mówimy, że graf H' jest H -ekspansją jeśli $H \preceq H'$. Wtedy, jeśli H jest grafem planarnym a \mathcal{C} klasą wszystkich H -ekspansji, to twierdzenie powyżej implikuje, że \mathcal{C} ma własność Erdősa-Pósy. Okazuje się, że grafy H spełniające powyższą tezę to dokładnie grafy planarne.

Jeśli weźmiemy $\mathcal{C} = \{K_2\}$, to dość prosto widzimy, że \mathcal{C} ma własność Erdősa-Pósy. Istotnie, jeśli największe skojarzenie w pewnym grafie G ma moc k , to wyrzucając $2k$ końców tych krawędzi z G otrzymamy graf bez krawędzi. Równoważnie, dla każdego G i dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$ zachodzi alternatywa (i) G ma k rozłącznych krawędzi lub (ii) istnieje zbiór co najwyżej $2k - 2$ wierzchołków w G po usunięciu których otrzymujemy graf bez krawędzi. Okazuje się, że ta prosta obserwacja ma ciekawe uogólnienie do ścieżek ukorzenionych w ustalonym zbiorze.

Niech G będzie grafem i $A \subseteq V(G)$. Ścieżka P w G jest A -ścieżką jeśli $|V(P)| \geq 2$, oba końce P leżą w A oraz żaden inny wierzchołek P nie leży w A . Największą liczbę parami rozłącznych A -ścieżek w G oznaczamy przez $\nu(G, A)$. W szczególności więc $\nu(G, V(G)) = \nu(G)$, gdzie $\nu(G)$ to wielkość największego skojarzenia w G .

Twierdzenie 8.2 (Gallai, 1961). *Dla każdej liczby całkowitej $k \geq 1$, dla każdego grafu G i $A \subseteq V(G)$ zachodzi*

- (i) G zawiera k parami rozłącznych A -ścieżek lub
- (ii) istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| \leq 2k - 2$ i $G - X$ nie ma A -ścieżki.

Zatem istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| \leq 2\nu(G, A)$ i $G - X$ nie ma A -ścieżki.

Gallai tak naprawdę podał formułę na $\nu(G, A)$, czyli maksymalną liczbę rozłącznych A -ścieżek. Powyższe twierdzenie jest natychmiastową konsekwencją tej formuły. Dla dowodu twierdzenia Gallai potrzebujemy najpierw wyprowadzić formułę Tutte'a-Berge'a na wielkość największego skojarzenia w grafie. Zaczniemy jednak od prostszego wyniku Tutte'a charakteryzującego grafy ze skojarzeniem doskonałym.

Nieparzysta spójna składowa grafu H to spójna składowa H o nieparzystej liczbie wierzchołków. Niech $\text{odd}(H)$ oznacza liczbę nieparzystych spójnych składowych grafu H .

Twierdzenie 8.3 (Tutte 1947). *Dla dowolnego grafu G zachodzi*

$$G \text{ ma doskonałe skojarzenie} \iff \text{odd}(G - S) \leq |S| \text{ dla każdego } S \subseteq V(G).$$

Poniższy dowód jest w całości przepisany z książki Diestela.

Dowód. Implikacja „ \implies ” jest oczywista. Dla dowodu drugiej implikacji, weźmy graf G bez doskonałego skojarzenia. Aby pokazać, że prawa strona równoważności w tezie nie jest spełniona, wystarczy znaleźć *zły* zbiór w G , to jest taki podzbiór S wierzchołków G , dla którego $\text{odd}(G - S) > |S|$.

Możemy założyć, że G jest krawędziowo maksymalnym grafem bez doskonałego skojarzenia. Rzeczywiście, jeśli G' jest grafem otrzymanym z G przez dodanie nowych krawędzi i S jest złym zbiorem w G' , to S jest również złym zbiorem w G : każda spójna składowa $G' - S$ jest sumą spójnych składowych $G - S$ i każda nieparzysta spójna składowa $G' - S$ musi zawierać co najmniej jedną nieparzystą spójną składową $G - S$, a więc $\text{odd}(G - S) \geq \text{odd}(G' - S) > |S|$.

Jak wygląda maksymalny krawędziowo graf G bez doskonałego skojarzenia? Gdyby w G istniał zły podzbiór wierzchołków S , to z krawędziowej maksymalności wywnioskowalibyśmy, że:

- (3) *wszystkie spójne składowe $G - S$ są klikami oraz każdy wierzchołek v w S sąsiaduje z wszystkimi wierzchołkami $G - v$.*

Z drugiej strony, pokażemy, że jeśli zbiór S spełnia (3), to albo S , albo zbiór pusty jest złym zbiorem w G . Gdyby zbiór S nie był zły, to mielibyśmy $\text{odd}(G - S) \leq |S|$. Możemy więc zbudować skojarzenie wysyłając po jednej krawędzi z nieparzystych komponentów $G - S$ do S i kojarząc ze sobą pozostałe wierzchołki — o ile G nie ma nieparzystej liczby wierzchołków, w którym to przypadku zbiór pusty jest zły w G .

Zatem wystarczy wykazać, że G ma podzbiór wierzchołków spełniający (3). Rozważmy zbiór S tych wierzchołków grafu G , które sąsiadują ze wszystkimi innymi wierzchołkami grafu. Załóżmy, że S nie spełnia (3). Wtedy w którejś spójnej składowej grafu $G - S$ znajdują się dwa niesąsiadujące ze sobą wierzchołki a i a' . Niech wierzchołki a, b, c będą pierwszymi trzema wierzchołkami na najkrótszej ścieżce z a

do a' w tym komponencie, wówczas $ab, bc \in E(G)$ oraz $ac \notin E(G)$. Ponieważ $b \notin S$ możemy ustalić wierzchołek d w G taki, że $bd \notin E(G)$. Z krawędziowej maksymalności G wiemy, że $G + ac$ ma doskonałe skojarzenie M_1 oraz $G + bd$ ma doskonałe skojarzenie M_2 .

Niech P będzie maksymalną ścieżką w G , która zaczyna się od wierzchołka d oraz incydentnej z nim krawędzi z M_1 i idzie naprzemiennie po krawędziach z M_1 i M_2 . Maksymalność tej ścieżki oznacza, że ostatni wierzchołek na tej ścieżce jest incydentny z pewną krawędzią w M_1 lub M_2 która nie jest krawędzią grafu G (czyli jest jedną z krawędzi ac lub bd). Jeśli ostatnia krawędź na ścieżce P jest z M_1 , to ostatnim wierzchołkiem jest b (bo inaczej moglibyśmy kontynuować skojarzeniem M_2 w G). W takim przypadku definiujemy $C = P + bd$. Jeśli ostatnia krawędź na ścieżce P jest z M_2 , to ostatnim wierzchołkiem jest pewien koniec v krawędzi ac . Wtedy definiujemy $C = dPvbd$. W obu przypadkach C jest parzystym cyklem z co drugą krawędzią w M_2 w którym wszystkie krawędzie z wyjątkiem bd są krawędziami grafu G . Stąd $(M_2 \setminus E(C)) \cup (E(C) \setminus M_2)$ jest doskonałym skojarzeniem w grafie G , sprzeczność. \square

Niech $\mathcal{K}(H)$ oznacza zbiór spójnych składowych grafu H .

Twierdzenie 8.4 (formuła Tutte'a-Berge'a 1958). *Dla dowolnego grafu G zachodzi*

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \min_{U \subseteq V(G)} \left(|U| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K)| \right\rfloor \right) \\ &= \frac{1}{2} \min_{U \subseteq V(G)} (|U| + |V(G)| - \text{odd}(G-U)). \end{aligned}$$

Dowód. Pokażemy najpierw prostszą nierówność \leq z tezy. Rozważ dowolny podzbiór $U \subseteq V(G)$. Każda krawędź w G dotyka zbioru U lub jest w pełni zawarta w komponencie $G - U$. Ponieważ U dotyka co najwyżej $|U|$ rozłącznych krawędzi w G i każdy komponent K grafu $G - U$ zawiera co najwyżej $\lfloor \frac{1}{2} |K| \rfloor$ rozłącznych krawędzi w G otrzymujemy $\nu(G) \leq |U| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \lfloor \frac{1}{2} |V(K)| \rfloor$. Zatem nierówność \leq z tezy zachodzi.

Tezę dowodzimy indukcyjnie ze względu na $|V(G)|$. Przypadek $V(G) = \emptyset$ jest oczywisty. Zauważ, że możemy założyć że G jest spójny: rzeczywiście, w przeciwnym wypadku aplikujemy założenie indukcyjne do komponentów G .

Założmy najpierw, że istnieje wierzchołek v w G , który jest w każdym największym skojarzeniu G . Wtedy $\nu(G - v) = \nu(G) - 1$ i z założenia indukcyjnego dla grafu $G - v$ istnieje $U' \subseteq V(G) \setminus \{v\}$ taki, że

$$\nu(G - v) = |U'| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-v-U')} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K)| \right\rfloor.$$

Zatem zbiór $U = U' \cup \{v\}$ dowodzi tezy.

Założmy zatem, że nie ma wierzchołka v w G , który byłby w każdym największym skojarzeniu G . W tym przypadku wykażemy, że $2\nu(G) \geq |V(G)| - 1$, co implikuje $\nu(G) \geq \left\lceil \frac{1}{2}(|V(G) - 1|) \right\rceil = \left\lfloor \frac{1}{2}|V(G)| \right\rfloor$. W takiej sytuacji $U = \emptyset$ będzie dowodzić tezę.

Dla dowodu nie wprost założmy, że $2\nu(G) \leq |V(G)| - 2$. A więc każde największe skojarzenie M w G omija co najmniej dwa różne wierzchołki u i v . Spośród takich M , u i v wybierzmy takie, że $\text{dist}(u, v)$ w G jest jak najmniejsze. Gdyby $\text{dist}(u, v) = 1$ to moglibyśmy powiększyć skojarzenie M o krawędź uv co stoi w sprzeczności z tym, że M jest największe w G . Zatem $\text{dist}(u, v) \geq 2$ i możemy ustalić dowolny pośredni wierzchołek t na najkrótszej ścieżce z u do v w G . Z założenia dla tego przypadku istnieje największe skojarzenie N w G omijające wierzchołek t . Ustalmy takie skojarzenie N .

Rozważ spójną składową P grafu indukowanego przez krawędzie $M \cup N$ zawierającą wierzchołek t . (łatwo zauważyć, że składowa ta jest ścieżką) Ponieważ M i N mają tę samą moc i są największe w G wnioskujemy, że P ma tyle samo krawędzi z M co z N . Ponieważ M omija u i v , komponent P nie może pokryć jednocześnie u i v . Założmy zatem, że P omija u . Wtedy wychodząc ze skojarzenia M i zamieniając naprzemiennie krawędzie M krawędziami N wzdłuż P otrzymujemy nowe skojarzenie o tej samej mocy co M , czyli największe w G , które omija u i t . Ponieważ, $\text{dist}(u, t) < \text{dist}(u, v)$ otrzymaliśmy sprzeczność z naszym założeniem nie wprost. To zamyka dowód indukcyjny nierówności \geq z tezy. \square

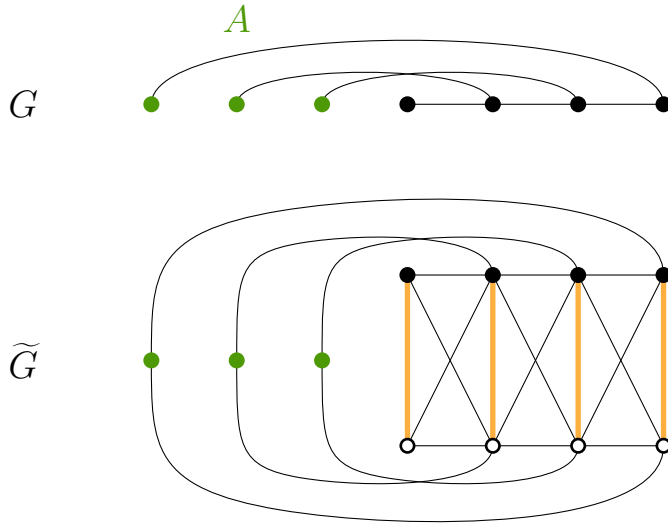
Ustalmy graf G i podzbiór wierzchołków $A \subseteq V(G)$. Skonstruujmy graf \tilde{G} z grafu G przez dodanie dla każdego $v \in V(G) - A$ jego kopii v' , połączonej krawędziami z wierzchołkiem v , wszystkimi sąsiadami wierzchołka v w G oraz wszystkimi kopiami sąsiadów wierzchołka v w $G - A$, patrz rysunek 17. Graf \tilde{G} nazywamy *konstrukcją Gallai* dla G i A .

Obserwacja 8.5 (Gallai). *Dla dowolnego grafu G oraz zbioru $A \subseteq V(G)$ zachodzi*

$$\nu(G, A) = \nu(\tilde{G}) - |V(G) \setminus A|.$$

Dowód. Skojarzenie $N = \{vv' \mid v \in V(G) \setminus A\}$ w grafie \tilde{G} ma moc $|V(G) \setminus A|$. Każda A -ścieżka $v_1v_2 \dots v_k$ w G indukuje ścieżkę powiększającą $v_1v_2v_2'v_3'v_3 \dots v_k$ dla skojarzenia N . Ponadto rozłączne A -ścieżki indukują rozłączne ścieżki powiększające dla N , więc $\nu(\tilde{G}) \geq |N| + \nu(G, A) = |V(G) \setminus A| + \nu(G, A)$.

W drugą stronę jeżeli M jest największym skojarzeniem w \tilde{G} , to różnica symetryczna $N \otimes M$ składa się z rozłącznych cykli i ścieżek alternujących. Co więcej wśród tych ścieżek alternujących jest co najmniej $|M| - |N|$ ścieżek powiększających dla skojarzenia N (to znaczy takich, że pierwsza i ostatnia krawędź są w M). Każda taka ścieżka powiększająca indukuje A -ścieżkę w G , a rozłączne ścieżki indukują rozłączne A -ścieżki. Mamy więc $\nu(G, A) \geq |M| - |N| = \nu(\tilde{G}) - |V(G) \setminus A|$. \square



RYSUNEK 17. Konstrukcja Gallai grafu \tilde{G} o własności $\nu(G, A) = \nu(\tilde{G}) - |V(G) \setminus A|$.

Twierdzenie 8.6 (Gallai 1961). *Dla dowolnego grafu G oraz dowolnego zbioru $A \subseteq V(G)$ zachodzi*

$$\nu(G, A) = \min_{U \subseteq V(G)} \left(|U| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K) \cap A| \right\rfloor \right).$$

Dowód. Nierówność \leq wynika z tego, że dla dowolnego zbioru $U \subseteq V(G)$ każda A -ścieżka przecina zbiór U lub ma oba końce w jednym z komponentów $G - U$.

Dla dowodu równości, niech $\mu = \min_{U \subseteq V(G)} \left(|U| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K) \cap A| \right\rfloor \right)$. Rozważmy konstrukcję Gallai \tilde{G} dla grafu G i zbioru A . Pokażemy, że \tilde{G} ma skojarzenie wielkości co najmniej $\mu + |V(G) \setminus A|$. Wykorzystując formułę Tutte'a-Berge'a (twierdzenie 8.4) dla \tilde{G} wystarczy pokazać, że dla każdego $\tilde{U} \subseteq V(\tilde{G})$ zachodzi

$$(4) \quad |\tilde{U}| + \sum_{K \in \mathcal{K}(\tilde{G}-\tilde{U})} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K)| \right\rfloor \geq \mu + |V(G) \setminus A|.$$

Jeżeli dla któregoś $v \in V(G) \setminus A$ dokładnie jeden z wierzchołków v i v' należy do \tilde{U} , to możemy usunąć ten wierzchołek z \tilde{U} nie zwiększając wyrażenia po lewej stronie nierówności (4). Jest tak, gdyż skoro v i v' mają to samo domknięte sąsiedztwo w \tilde{G} , to dokładnie jedna spójna składowa $\tilde{G} - \tilde{U}$ wzrośnie o dokładnie 1.

Możemy więc założyć, że dla każdego $v \in V(G) \setminus A$, albo $\{v, v'\} \subseteq \tilde{U}$, albo $\{v, v'\} \cap \tilde{U} = \emptyset$. Zdefiniujmy $U = \tilde{U} \cap V(G)$. Wówczas każda składowa K grafu $G - U$ jest postaci $\tilde{K} \cap G$ dla pewnej składowej \tilde{K} grafu $\tilde{G} - \tilde{U}$. Stąd (TODO: rozpisać ostatnia

równość poniżej.)

$$\begin{aligned} |\tilde{U}| + \sum_{\tilde{K} \in \mathcal{K}(\tilde{G}-\tilde{U})} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(\tilde{K})| \right\rfloor &= |U| + |V(G) \setminus A| + \sum_{\tilde{K} \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(\tilde{K}) \cap A| \right\rfloor \\ &\geq \mu + |V(G) \setminus A|. \end{aligned}$$

To dowodzi nierówność (4).

Zatem w grafie \tilde{G} istnieje skojarzenie o mocy $\mu + |V(G) \setminus A|$. Stąd na mocy obserwacji 8.5 w grafie G istnieje μ rozłącznych A -ścieżek. \square

Tak jak zapowiadaliśmy, własność Erdősa-Pósy A -ścieżek jest konsekwencją twierdzenia 8.6.

Dowód twierdzenia 8.2. Jeśli $k \leq \nu(G, A)$, to oczywiście G zawiera k rozłącznych A -ścieżek a więc warunek (i) jest spełniony. Jeśli $k > \nu(G, A)$, to rozważmy zbiór $U \subseteq V(G)$ świadczący $\nu(G, A) = |U| + \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K) \cap A| \right\rfloor$. Wtedy niech X będzie sumą zbioru U i zbiorów wszystkich wierzchołków z $A \cap V(K)$ poza jednym, dla każdego komponentu $K \in \mathcal{K}(G-U)$. Łatwo widać, że $|X| \leq |U| + 2 \cdot \sum_{K \in \mathcal{K}(G-U)} \left\lfloor \frac{1}{2} |V(K) \cap A| \right\rfloor \leq 2\nu(G, A) \leq 2(k-1)$ oraz że $G-X$ nie ma A -ścieżki. \square

Przedstawimy teraz inny, krótszy argument dowodzący twierdzenia 8.2 tylko z gorszym ograniczeniem na moc zbioru $|X|$ —zamiast $|X| \leq 2k-2$ otrzymamy $|X| \leq 4k$. W szczególności argument nie będzie oparty na formule Tutte'a-Berge'a. Idea argumentu, nazywana techniką ramki, jest dość elastyczna i można próbować ją dopasowywać do innych problemów. Pokażemy to dowodząc własność Erdősa-Pósy dla parzystych A -ścieżek.

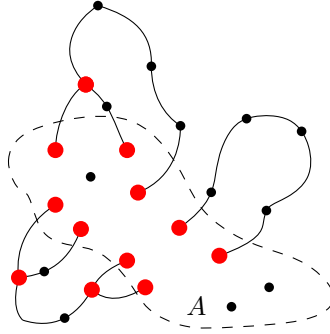
Lemat 8.7. *Każde drzewo o maksymalnym stopniu co najwyżej 3 oraz p liściach zawiera $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ parami rozłącznych ścieżek pomiędzy liśćmi.*

Dowód. Niech T będzie drzewem jak w wypowiedzi. Jeśli T ma co najwyżej 3 liście to teza jest oczywista. Załóżmy, że T ma co najmniej 4 liście. Po skonstruowaniu każdego wierzchołka stopnia 2 do jednego z jego sąsiadów, możemy założyć, że w T nie ma wierzchołków o stopniu 2. Ukorzeniamy drzewo T w dowolnym wierzchołku. Wybieramy wierzchołek t stopnia 3 w T o maksymalnej odległości od korzenia. Dwóch z trzech sąsiadów t jest liśćmi, powiedzmy że są to liście a_1 i a_2 . Usuamy ścieżkę $a_1 t a_2$ z rozważanego drzewa. Zauważ, że nowe drzewo ma ten sam zbiór liści co stare drzewo. Indukcyjnie dla nowego drzewa mamy $\lfloor \frac{p-2}{2} \rfloor$ ścieżek, które wraz ze ścieżką $a_1 t a_2$ dowodzą tezy. \square

Dowód twierdzenia 8.2 dla $|X| \leq 4k$. Niech $F \subseteq G$ będzie maksymalnym na inkluzję lasem o następujących własnościach, patrz rysunek 8:

- (i) maksymalny stopień wierzchołka w F wynosi co najwyżej 3 i F nie ma wierzchołków izolowanych,

- (ii) każdy liść lasu F leży w A i każdy wierzchołek ze zbioru $A \cap V(F)$ jest liściem F .



RYSUNEK 18. Las F i wybrany podzbiór $X \subseteq V(F)$.

Niech c będzie liczbą spójnych składowych lasu F . Jeśli $|A \cap V(F)| \geq 2k + c$, to aplikując lemat 8.7 otrzymujemy k rozłącznych A -ścieżek. Jeśli zaś $|A \cap V(F)| < 2k + c$, to wybieramy

$$X = A \cap V(F) \cup \{v \in V(F) \mid \text{stopień } v \text{ w } F \text{ równy jest } 3\}.$$

W każdym drzewie o stopniu maksymalnym ≤ 3 wiemy, że liczba wierzchołków o stopniu 3 jest równa liczbie liści odjąć 2. Zatem

$$|X| = |A \cap V(F)| + |A \cap V(F)| - 2c < 4k.$$

Twierdzimy, że X przecina każdą A -ścieżkę w G . Dla dowodu nie wprost niech P będzie A -ścieżką omijającą X , o końcach $a_1, a_2 \in A$. Ponieważ, wszystkie liście F są w X wnioskujemy, że $a_1, a_2 \notin V(F)$. Jeśli P jest rozłączne z F to $F \cup P$ byłby lasem przeczącym maksymalności wyboru F . Zatem P przecina F i niech v będzie pierwszym wierzchołkiem na P od strony a_1 , który jest w $V(F)$. Z własności F wiemy, że v ma stopień 2 lub 3 w F . Jeśli v ma stopień 3 w F , to X przecina P , sprzeczność. Jeśli v ma stopień 2 w F , to $F \cup P[a_1, v]$ przeczy maksymalności F , sprzeczność. \square

Tak jak zapowiadaliśmy pokażemy jeszcze argument z techniką ramki tym razem dowodząc, że parzyste A -ścieżki mają własność Erdősa-Pósy.

Twierdzenie 8.8. *Dla każdej liczby całkowitej $k \geq 1$, dla każdego grafu G i $A \subseteq V(G)$ zachodzi*

- (i) G zawiera k parami rozłącznych parzystych A -ścieżek lub
- (ii) istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| \leq 10k$ i $G - X$ nie ma A -ścieżki o parzystej liczbie krawędzi.

Dowód. Niech $F \subseteq G$ będzie maksymalnym na inkluzję lasem o następujących własnościach:

- (i) maksymalny stopień wierzchołka w F wynosi co najwyżej 3 i F nie ma wierzchołków izolowanych,

- (ii) każdy liść lasu F leży w A i każdy wierzchołek ze zbioru $A \cap V(F)$ jest liściem F ,
- (iii) każdy komponent F zawiera parzystą A -ścieżkę.

Niech c będzie liczbą spójnych składowych lasu F . Jeśli F zawiera co najmniej k komponentów to z warunku (iii), mamy k rozłącznych parzystych A -ścieżek. Załóżmy więc, że $c < k$.

Rozważmy najpierw, że $|A \cap V(F)| \geq 4k + 2c$. Niech T będzie komponentem F . Drzewo T jest w szczególności grafem dwudzielnym i możemy poprawnie pokolorować jego wierzchołki dwoma kolorami. Takie kolorowanie rozбивa nam zbiór liści $A \cap V(T)$ drzewa T na dwa podzbiory $A_{T,1}$ i $A_{T,2}$. Powiedzmy, że $|A_{T,1}| \geq |A_{T,2}|$. Zauważ, że każda $A_{T,1}$ -ścieżka w T jest parzysta. Zaczynając od drzewa T usuwamy iteracyjnie liście drzewa spoza $A_{T,1}$ aż do momentu gdy uzyskane drzewo ma wszystkie liście w $A_{T,1}$. Zauważ, że otrzymane drzewo wciąż ma maksymalny stopień co najwyżej 3, zatem z lematu 8.7 dostajemy $\lfloor \frac{|A_{T,1}|}{2} \rfloor$ rozłącznych parzystych A -ścieżek. Zauważ również, że

$$\left\lfloor \frac{|A_{T,1}|}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{|A \cap V(T)|}{4} \right\rfloor \geq \frac{|A \cap V(T)|}{4} - \frac{1}{2},$$

Zatem liczba rozłącznych parzystych A -ścieżek otrzymanych ściągniętych z wszystkich komponentów T lasu F wynosi co najmniej

$$\sum_T \frac{|A \cap V(T)|}{4} - \frac{1}{2} = \frac{|A \cap V(F)|}{4} - \frac{c}{2} \geq \frac{4k + 2c}{4} - \frac{c}{2} \geq k.$$

Założmy teraz, że $|A \cap V(F)| < 4k + 2c$. Wybieramy

$$X = A \cap V(F) \cup \{v \in V(F) \mid \text{stopień } v \text{ w } F \text{ równy jest } 3\}.$$

Jeszcze raz, w każdym drzewie o stopniu maksymalnym ≤ 3 wiemy, że liczba wierzchołków o stopniu 3 jest równa liczbie liści odjąć 2. Zatem

$$|X| = |A \cap V(F)| + |A \cap V(F)| - 2c \leq 8k + 2c \leq 10k.$$

Twierdzimy, że X przecina każdą parzystą A -ścieżkę w G . Dla dowodu nie wprost niech P będzie A -ścieżką omijającą X , o końcach $a_1, a_2 \in A$. Ponieważ, wszystkie liście F są w X wnioskujemy, że $a_1, a_2 \notin V(F)$. Jeśli P jest rozłączne z F to $F \cup P$ byłby lasem przeczącym maksymalności wyboru F . Zatem P przecina F i niech v będzie pierwszym wierzchołkiem na P od strony a_1 , który jest w $V(F)$. Z własności F wiemy, że v ma stopień 2 lub 3 w F . Jeśli v ma stopień 3 w F , to X przecina P , sprzeczność. Jeśli v ma stopień 2 w F , to $F \cup P[a_1, v]$ przeczy maksymalności F , sprzeczność. \square

Twierdzenie Erdősa-Pósy także można udowodnić przy pomocy techniki ramki. My jednak na zakończenie tego rozdziału prezentujemy nowy dowód (opublikowany w 2020) używający lematu o pakowaniu kul (lemat 3.11).

Lemat 8.9. *Niech k będzie nieujemną liczbą całkowitą i niech G będzie grafem o minimalnym stopniu $\delta(G) \geq 3k$. Wówczas G zawiera k wierzchołkowo rozłącznych cykli.*

Dowód. Lemat dowodzimy indukcyjnie względem k . Teza jest oczywiście prawdziwa dla $k = 0$. Załóżmy więc $k \geq 1$. Skoro minimalny stopień w G wynosi co najmniej 3, G nie jest lasem. Niech C będzie najkrótszym cyklem w G . Każdy wierzchołek z $V(G) \setminus V(C)$ sąsiaduje z co najwyżej 3 wierzchołkami na cyklu C , gdyż w przeciwnym razie istniałby cykl krótszy niż C . Stąd minimalny stopień w grafie $G - V(C)$ wynosi co najmniej $3(k - 1)$, czyli z założenia indukcyjnego w $G - V(C)$ istnieje rodzina $k - 1$ wierzchołkowo rozłącznych cykli. Dodając do tej rodziny cykl C otrzymujemy k wierzchołkowo rozłącznych cykli. \square

Twierdzenie 8.10 (Erdős-Pósa; jeszcze raz). *Dla każdego grafu G oraz każdej dodatniej liczby całkowitej k zachodzi:*

- (i) G ma k rozłącznych cykli, lub
- (ii) istnieje podzbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| < k \cdot (8\lceil \log_2(k) \rceil + 2)$ oraz $G - X$ nie ma żadnych cykli.

Dowód. Twierdzenie dowodzimy indukcyjnie względem $|V(G)|$. Baza indukcji $|V(G)| = 0$ jest oczywiście prawdziwa dla każdego k . Załóżmy więc, że $|V(G)| \geq 1$. Twierdzenie jest prawdziwe gdy $k = 1$, załóżmy więc również $k \geq 2$. Rozważamy dwa przypadki w zależności od długości najkrótszego cyklu w G .

Założmy najpierw, że G zawiera cykl C o długości co najwyżej $8\lceil \log_2(k) \rceil + 2$. Wówczas na mocy założenia indukcyjnego, w grafie $G - V(C)$ istnieje rodzina $k - 1$ wierzchołkowo rozłącznych cykli lub taki zbiór X' o mocy co najwyżej $(k - 1) \cdot (8\lceil \log_2(k - 1) \rceil + 2)$, że graf $(G - V(C)) - X'$ nie ma żadnych cykli. W pierwszym przypadku dodając cykl C do tej rodziny cykli otrzymujemy rodzinę k rozłącznych cykli. W drugim przypadku teza jest spełniona przez zbiór $X = X' \cup V(C)$, gdyż

$$\begin{aligned} |X| &= |X'| + |V(C)| \\ &\leq (k - 1) \cdot (8\lceil \log_2(k - 1) \rceil + 2) + (8\lceil \log_2(k) \rceil + 2) \\ &\leq k \cdot (8\lceil \log_2(k) \rceil + 2). \end{aligned}$$

To kończy dowód w przypadku gdy G ma cykl długości co najwyżej $8\lceil \log_2(k) \rceil + 2$.

Teraz załóżmy że najkrótszy cykl w G ma długość co najmniej $8\lceil \log_2(k) \rceil + 3$. Jeżeli graf G zawiera wierzchołek v o stopniu 1, to żaden cykl nie zawiera v , więc wystarczy skorzystać z założenia indukcyjnego dla $G - v$. Podobnie, jeżeli pewien wierzchołek v grafu G ma stopień 2, to wystarczy skorzystać z założenia indukcyjnego dla grafu G/e , gdzie e jest dowolną krawędzią incydentną z v (korzystamy z faktu, że najkrótszy cykl w G ma długość większą niż 3). Możemy więc założyć, że minimalny stopień grafu G wynosi co najmniej 3. Korzystając z lematu 3.11, wnioskujemy, że G ma minor o minimalnym stopniu co najmniej $3 \cdot 2^{\lceil \log_2(k) \rceil} \geq 3k$. Ten minor posiada k rozłącznych cykli z lematu 8.9. Zatem graf G również musi posiadać k rozłącznych cykli. To kończy dowód indukcyjny. \square

9. PROBLEM PLANAR VERTEX DELETION: TECHNIKA NIEISTOTNEGO WIERZCHOŁKA

Ten rozdział opiera się na materiale z książki *Parametrized complexity*. Opiszemy tutaj technikę dowodową stosującą twierdzenie o kracie znaną jako technika nieistotnego wierzchołka (ang. *irrelevant vertex technique*). Pionierami tej techniki są Robertson i Seymour, którzy rozwiązali w ten sposób problem VERTEX DISJOINT PATHS. W tym problemie na wejściu podany jest graf G , liczba naturalna k oraz k par wierzchołków $(s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k)$ i zadaniem jest rozstrzygnąć czy istnieje k rozłącznych wierzchołkowo ścieżek w G łączących podane pary wierzchołków. Rozwiązanie tego problemu zostało przedstawione w jednej z prac w serii *Graph Minors* tych autorów i jest trzonem wielomianowego algorytmu rozstrzygającego dla ustalonego grafu H czy podany na wejściu graf G zawiera H jako minor. My przedstawimy technikę nieistotnego wierzchołka na możliwie najprostszym przykładzie.

W problemie PLANAR VERTEX DELETION dostajemy na wejściu graf G oraz liczbę naturalną k . Naszym zadaniem jest rozstrzygnąć na pytanie czy istnieje taki podzbiór wierzchołków D grafu G o mocy co najwyżej k , że $G - D$ jest planarny. Przedstawimy dowód następującego twierdzenia.

Twierdzenie 9.1. *Problem PLANAR VERTEX DELETION jest rozwiązywalny w czasie $f(k) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.*

Nim przejdziemy do techniki motywującej ten rozdział musimy opisać wstępną dość standardową redukcję w projektowaniu algorytmów FPT.

9.1. Iteracyjna kompresja. Zamiast opisywać ogólną strategię metody iteracyjnej kompresji przedstawimy dwa przykłady jej zastosowania. Następnie użyjemy jej by zredukować nasz docelowy problem PLANAR VERTEX DELETION.

Dla grafu G podzbiór Z wierzchołków G jest *pokryciem wierzchołkowym* jeśli każda krawędź w G jest incydentna z wierzchołkiem w Z . W problemie VERTEX COVER na wejściu otrzymujemy parę (G, k) , gdzie G jest grafem a k jest liczbą naturalną. Naszym zadaniem jest odpowiedzieć czy istnieje pokrycie wierzchołkowe G o wielkości co najwyżej k .

Rozważmy następującą próbę rozwiązania problemu VERTEX COVER. Wygenerujmy zachłannie maksymalne (na zawieranie) skojarzenie w G . Oczywiście zbiór Z końców krawędzi takiego skojarzenia jest pokryciem wierzchołkowym. Do tego jeśli $|Z| > 2k$ to stwierdzamy, że (G, k) jest nie-instancją. Załóżmy zatem, że $|Z| \leq 2k$. Teraz rozgałęziamy proces zgadując jakie jest przecięcie optymalnego pokrycia wierzchołkowego X ze zbiorem Z . Ustalmy więc, że $X_Z \subseteq Z$ i będziemy teraz szukać pokrycia wierzchołkowego X grafu G takiego, że $|X| \leq k$ oraz $X_Z = X \cap Z$. Niech $W = Z \setminus X_Z$. Jeśli $G[W]$ zawiera krawędź, to natychmiast wiemy, że dla tak wybranego X_Z nie istnieje szukany X . Przyjmijmy zatem, że $G[W]$ nie ma krawędzi. Zauważmy, że dowolne pokrycie wierzchołkowe X grafu G takie, że $X \cap Z = X_Z$, musi zawierać $X_Z \cup N_G(W)$. Skoro Z jest pokryciem wierzchołkowym G wiemy jednak, że

$X_Z \cup N_G(W)$ jest pokryciem wierzchołkowym. A zatem, jeśli dla pewnego wyboru $X_Z \subseteq Z$ mamy $|X_Z \cup N_G(W)| \leq k$, to możemy zwrócić rozwiązanie $X := X_Z \cup N_G(W)$ a w przeciwnym wypadku stwierdzamy, że (G, k) jest nie-instancją. Otrzymaliśmy algorytm rozwiązujący problem VERTEX COVER w czasie $2^{|Z|} n^{\mathcal{O}(1)} \leq 4^k n^{\mathcal{O}(1)}$.

W opisie algorytmu w poprzednim paragrafie rozważaliśmy dość trywialny problem DISJOINT VERTEX COVER w którym na wejściu mamy graf $G - X_Z$ oraz pokrycie wierzchołkowe W grafu $G - X_Z$ i w którym naszym zadaniem jest stwierdzić czy istnieje (i zwrócić) pokrycie wierzchołkowe $G - X_Z$ rozmiaru co najwyżej $k - |X_Z|$ całkowicie rozłączne z W .

W przedstawionym algorytmie korzystamy z faktu, że umiemy znaleźć aproksymującą optymalnego rozwiązania problemu. Podamy teraz alternatywną metodę rozwiązania problemu VERTEX COVER, która nie korzysta z aproksymacji. Metoda ta znana jako iteracyjna kompresja przyda nam się w konstrukcji bardziej złożonych algorytmów FPT.

Rozważmy dowolne uporządkowanie wierzchołków (v_1, \dots, v_n) grafu G . Niech G_i będzie grafem indukowanym przez pierwsze i wierzchołków t.j. $G_i = G[\{v_1, \dots, v_i\}]$. Zaczniemy iterację dla $i = 1$ i weźmy $X_1 = \{v_1\}$. Wtedy oczywiście X_1 jest pokryciem G_1 o mocy co najwyżej k . Załóżmy teraz, że dla $i \geq 1$ skonstruowaliśmy już X_i pokrycie wierzchołkowe G_i o mocy co najwyżej k . Wtedy wykonujemy następujący krok iteracji. Rozważ zbiór $Z_{i+1} = X_i \cup \{v_{i+1}\}$, który jest pokryciem wierzchołkowym G_{i+1} . Jeśli $|Z_{i+1}| \leq k$, to kończymy krok i ustalamy $X_{i+1} = Z_{i+1}$. W przeciwnym przypadku mamy $|Z_{i+1}| = k + 1$ i przechodzimy do „kompresji” rozwiązania. Stosując to samo rozumowanie co we wcześniejszym rozwiązaniu rozgałęziamy się $2^{|Z_{i+1}|} = 2^{k+1}$ razy i rozwiązujemy dokładnie tyle instancji problemu DISJOINT VERTEX COVER. Wszystko to robimy w czasie $2^{k+1} n^{\mathcal{O}(1)}$ i w efekcie otrzymujemy pokrycie wierzchołkowe X_{i+1} grafu G_{i+1} lub stwierdzamy, że G_{i+1} (a zatem również G) nie ma pokrycia o mocy co najwyżej k . Jeśli X_{i+1} się znalazł, to przechodzimy do następnego kroku iteracji. W efekcie zaprojektowaliśmy algorytm rozwiązujący problem VERTEX COVER w czasie $2^k n^{\mathcal{O}(1)}$.

Drugim przykładem użycia iteracyjnej kompresji będzie rozwiązanie problemu FEEDBACK VERTEX SET. Zbiór wierzchołków w grafie G *rozrywa cykle* G jeśli $G - X$ nie zawiera cyklu (jest lasem). Na wejściu w problemie FEEDBACK VERTEX SET otrzymujemy graf G oraz liczbę całkowitą k a naszym zadaniem jest stwierdzić czy istnieje podzbiór co najwyżej k wierzchołków X rozrywający cykle G .

Rozważmy dowolne uporządkowanie (v_1, \dots, v_n) wierzchołków grafu G Niech G_i będzie grafem indukowanym przez pierwsze i wierzchołków t.j. $G[\{v_1, \dots, v_i\}]$. Zaczniemy iterację dla $i = 1$ i weźmy $X_1 = \{v_1\}$. Wtedy oczywiście X_1 rozrywa cykle G_1 i jest mocy co najwyżej k . Załóżmy teraz, że dla $i \geq 1$ skonstruowaliśmy już zbiór X_i taki, X_i rozrywa cykle G_i i $|X_i| \leq k$. Wtedy wykonujemy następujący krok iteracji. Rozważ zbiór $Z_{i+1} = X_i \cup \{v_{i+1}\}$. Oczywiście X_{i+1} rozrywa cykle G_{i+1} . Jeśli $|Z_{i+1}| \leq k$, to kończymy krok i ustalamy $X_{i+1} = Z_{i+1}$. W przeciwnym przypadku mamy $|Z_{i+1}| = k + 1$ i przechodzimy do „kompresji” rozwiązania. Rozgałęziamy się

$2^{|Z_{i+1}|} = 2^{k+1}$ razy i zgadujemy podzbiór $X_Z \subseteq Z_{i+1}$. Wtedy szukamy podzbioru X rozrywającego cykle G_{i+1} takiego, że $X \cap Z_{i+1} = X_Z$ oraz $|X| \leq k$.

Pragniemy rozwiązać problem DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET którego instancją jest trójka (G, W, k') , gdzie G jest grafem a W podzbiorem wierzchołków rozrywającym cykle G . Naszym zadaniem jest znaleźć zbiór $X \subseteq V(G) \setminus W$ rozrywający cykle G taki że $|X| \leq k'$ lub stwierdzić, że taki zbiór X nie istnieje. Dodatkową własnością początkowych instancji będzie, że $|W| \leq k' + 1$. Przyjmijmy na chwilę, że umiemy rozwiązać DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET w czasie $g(k') \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$. Wtedy czas potrzebny na rozwiązanie wszystkich rozgałęzień w naszym algorytmie wynosi co najwyżej

$$\sum_{i=0}^k \binom{k+1}{i} g(k-i) n^{\mathcal{O}(1)}.$$

W szczególności, jeśli $g(k') \leq \alpha^{k'}$ to przeprowadzimy kompresję w czasie $(1+\alpha)^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

Rozważmy zatem instancję (G, W, k) problemu DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET. Niech $H = G - W$. Przerobimy kilka prostych redukcji upraszczających instancję problemu.

Redukcja (1). Jeśli G ma wierzchołek stopnia 1, to usuń taki wierzchołek z G .

Redukcja (2). Jeśli istnieje wierzchołek v w H taki, że $G[W \cup \{v\}]$ zawiera cykl, to dodaj v do (globalnego) rozwiązania i rozwiąż instancję $(G - v, W, k - 1)$.

Redukcja (3). Jeśli istnieje wierzchołek v w H o stopniu 2 w G taki, że co najmniej jeden sąsiad v jest w $V(H)$, to usuń v i połącz nową krawędzią jego sąsiadów (nawet jeśli już sąsiadowali ze sobą; zatem pracujemy z multigrafami).

Teraz opiszemy jak rozwiązać instancję (G, W, k) problemu DISJOINT FEEDBACK VERTEX SET w czasie $4^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$. Jeśli $G[W]$ zawiera cykl, to (G, W, k) jest nie-instancją. Zakładamy więc, że $G[W]$ jest lasem. Aplikujemy trzy opisane redukcje do naszej instancji dopóki możemy. Dla uproszczenia przyjmijmy, że (G, W, k) to otrzymana instancja po redukcjach. Jeśli $k < 0$, to (G, W, k) jest nie-instancją. Zakładamy więc, że $k \geq 0$.

Przypominamy, że $H = G - W$ jest lasem (bo W rozrywa cykle G). Jeśli H nie ma wierzchołków, to (G, W, k) jest tak-instancją. Przyjmijmy, że las H jest niepusty i rozważmy dowolny liść x w H . Wierzchołek x musi mieć co najmniej dwu sąsiadów w W , gdyż w przeciwnym wypadku moglibyśmy zastosować redukcję (1) lub (3). Sąsiedzi x w W muszą leżeć w różnych spójnych składowych H , gdyż w przeciwnym wypadku moglibyśmy zastosować redukcję (2). Teraz rozgałęziamy się i zgadujemy się czy x należy do rozwiązania czy też nie. Rozwiązujemy więc dwie nowe instancje problemu $(G - x, W, k - 1)$ oraz $(G, W \cup \{x\}, k)$. Jeśli jedna z tych instancji jest tak-instancją, to (G, W, k) jest tak-instancją. Jeśli obie instancje są nie-instancjami, to (G, W, k) jest nie-instancją.

Pozostaje oszacować złożoność czasową rozwiązania. Dla instancji $I = (G, W, k)$ definiujemy miarę

$$\mu(I) = k + \# \text{ spójnych składowych grafu } G[W]$$

Zauważ, że aplikacja redukcji nie zwiększa miary instancji. Co się dzieje z miarą instancji gdy się rozgałęziamy? Miara $(G - x, W, k - 1)$ jest o jeden mniejsza gdyż liczba komponentów się nie zmieniła a parametr spadł z k do $k - 1$. Zaś miara $(G, W \cup \{x\}, k)$ również się zmniejszyła gdyż $G[W \cup \{x\}]$ ma co najmmniej jedną spójną składową mniej niż $G[W]$ (bo x sąsiaduje z co najmniej dwoma składowymi $G[W]$). To oznacza, że złożoność czasowa rozwiązania to $2^{\mu(I)} \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

Ponieważ początkowa instancja (G, W, k) ma własność, że $|W| \leq k + 1$, rozwiązanie działa w czasie ograniczonym przez $2^{2k+1} \cdot n^{\mathcal{O}(1)} = 4^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

Przeprowadzając iteracyjną kompresję (n kroków) otrzymujemy algorytm rozwiązujący problem FEEDBACK VERTEX SET w czasie $5^k \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

9.2. Programowanie dynamiczne na dekompozycji drzewiastej. W tej podsekcji pokażemy, że dla ustalonej liczby w , istnieje liniowy algorytm rozwiązujący problem DISJOINT PLANAR VERTEX DELETION na grafach o szerokości drzewiastej co najwyżej w . Jest to szczególny przypadek meta-twierdzenia Courcelle’a.

Twierdzenie 9.2. *Każda własność opisywalna w monadycznej logice drugiego rzędu (MSO) jest rozstrzygalna w czasie liniowym na grafach o stałej szerokości drzewiastej.*

Monadyczna logika drugiego rzędu jest uogólnieniem logiki pierwszego rzędu. W logice pierwszego rzędu, formuły tworzymy za pomocą zmiennych x, y, z, \dots odnoszących się do wierzchołków grafu, binarnych predykatów $=$ oraz \mathbf{adj} oznaczających równość i relację sąsiedztwa wierzchołków, spójników logicznych oraz kwantyfikatorów. Przykładowo, istnienie wierzchołka sąsiadującego ze wszystkimi innymi wierzchołkami grafu może być opisane za pomocą formuły

$$\exists x. \forall y. (y = x \vee \mathbf{adj}(x, y)).$$

Monadyczna logika drugiego rzędu dodaje zmienne odnoszące się do *zbiorów* wierzchołków oraz binarny predykat \in . Przykładowo spójność grafu może być opisana za pomocą formuły

$$\forall S. ((\exists x. x \in S) \wedge (\exists y. \neg y \in S)) \Rightarrow \exists x. \exists y. x \in S \wedge \neg y \in S \wedge \mathbf{adj}(x, y).$$

Dla każdego grafu H , własność posiadania H -minoru można opisać za pomocą formuły w MSO. W szczególności własność planarności można opisać formułą monadyczną. Ponieważ częścią instancji (G, W, k) problemu DISJOINT PLANAR VERTEX DELETION jest podzbiór W wierzchołków grafu G formuła monadyczna opisująca czy (G, W, k) jest tak-instancją czy nie-instancją potrzebuje dodatkowego unarnego predykatu (opisującego czy wierzchołek jest w W). Na szczęście meta-twierdzenie Courcelle’a pozostaje prawdziwe przy rozszerzeniu logiki o taki unarny predykat.

Jednak zamiast dowodzić abstrakcyjne meta-twierdzenie, naszkicujemy jak zaprojektować dynamika rozwiązującego wprost problem DISJOINT PLANAR VERTEX DELETION na grafach o ograniczonej szerokości drzewiastej. Konkretniej, skonstruujemy algorytm, który dla instancji (G, W, k) problemu DISJOINT PLANAR VERTEX

DELETION oraz dla dekompozycji drzewiastej grafu G mającej szerokość ograniczoną przez stałą w , w czasie liniowym znajdzie taki zbiór wierzchołków X rozłączny z W o mocy co najwyżej k , że $G - X$ jest planarny, lub stwierdzi że taki X nie istnieje.

W pierwszym kroku algorytm zmodyfikuje nieco dekompozycję drzewiastą. W efekcie dostaniemy taką dekompozycję drzewiastą (T, \mathcal{B}) o szerokości co najwyżej w , że T jest ukorzenionym drzewem w którym każdy węzeł ma co najwyżej dwoje dzieci oraz

- (i) $B_t = \emptyset$ gdy t jest korzeniem lub liściem drzewa T ;
- (ii) jeśli węzeł t ma dwoje dzieci t_1 i t_2 , to $B_t = B_{t_1} = B_{t_2}$;
- (iii) jeśli węzeł t ma jedno dziecko t_1 , to albo $B_t \subseteq B_{t_1}$ i $|B_{t_1}| = |B_t| + 1$, albo $B_{t_1} \subseteq B_t$ i $|B_t| = |B_{t_1}| + 1$.

Teraz zdefiniujemy podproblem dla programowania dynamicznego. Ostatecznie interesuje nas, czy da się usunąć co najwyżej k wierzchołków z całego grafu tak, żeby graf był planarny, czyli nie zawierał $K_{3,3}$ - ani K_5 -minoru. W podproblemie programowania dynamicznego dla ustalonego węzła t dekompozycji drzewiastej będziemy wyznaczać w pewnym sensie wszystkie możliwe modele małych grafów, które możemy otrzymać kontraktując wierzchołki w G_t do grafu na wierzchołkach w B_t . Będziemy trzymać wszystkie możliwości dla każdego wariantu wyboru usuwanego zbioru X , t.j. dla każdej możliwości przecięcia $X \cap B_t$ oraz każdej wielkości $|X| \in \{0, \dots, k\}$.

Przejdziemy teraz do precyzyjniejszego opisu podproblemu. Ustalmy instancję (G, W, k) problemu DISJOINT PLANAR VERTEX DELETION oraz dekompozycję drzewiastą (T, \mathcal{B}) grafu G . Zakładamy, że drzewo T jest ukorzenione i dla każdego węzła t , przez G_t oznaczamy podgraf grafu G indukowany przez worki wszystkich węzłów poddrzewa ukorzenionego w t . Podproblemem dla węzła t będzie wyznaczenie wszystkich takich trójek (ℓ, A, \mathcal{H}) , gdzie $0 \leq \ell \leq k$ i $A \subseteq B_t$, że istnieje taki podzbiór $X \subseteq V(G_t) \setminus W$ o mocy ℓ , że $X \cap B_t = A$ i \mathcal{H} jest opisem wszystkich małych grafów jakie można otrzymać kontraktując graf $G_t - X$ do zbioru $B_t \setminus X$. Konkretniej, \mathcal{H} jest rodziną wszystkich takich par (H, f) , gdzie H jest grafem na zbiorze $V(H) \subseteq \{1, \dots, w + 7\}$, a f jest funkcją przypisującą wierzchołkom H podzbiory zbioru B_t , dla których istnieje model ϕ grafu H w $G_t - X$, że $V(\phi(i)) \cap B_t = f(i)$ dla każdego $i \in V(H)$ oraz istnieje co najwyżej 6 wierzchołków $i \in V(H)$, że $f(i) = \emptyset$. Gdyby udało się rozwiązać tak zdefiniowany podproblem dla wszystkich węzłów, to rozwiązanie sprowadza się do stwierdzenia, czy w rozwiązaniu dla korzenia jest taka trójka (ℓ, A, \mathcal{H}) , że \mathcal{H} nie zawiera żadnej pary postaci $(K_{3,3}, f)$ ani (K_5, f) . Potencjalnie liczba trójek (ℓ, A, \mathcal{H}) może wydawać się bardzo duża, ale możemy ją ograniczyć przez

$$(k + 1) \cdot 2^{w+1} \cdot 2^{2^{\binom{w+7}{2}}} \cdot (2^{w+1})^{w+7},$$

co jest stałą, jeśli k i w są stałe.

Teraz pozostaje przekonać się, że możemy policzyć podproblem dla węzła na podstawie rozwiązań podproblemów dla jego dzieci. . .

9.3. Nieistotny wierzchołek. Niech G będzie grafem a C cyklem w G . C -mostem w grafie G nazywamy podgraf który albo jest ścieżką długości 1 między dwoma niesąsiadującymi wierzchołkami cyklu C , albo podgrafem otrzymanym ze spójnej składowej grafu $G - C$ przez dodanie wszystkich krawędzi łączących tę składową z cyklem C (razem z ich końcami w C). *Graf nachodzenia* $O(G, C)$ to graf którego wierzchołkami są wszystkie C -mosty, w którym dwa C -mosty B_1 i B_2 są połączone krawędzią kiedy zachodzi któryś z warunków:

- (i) $|V(B_1) \cap V(B_2)| \geq 3$ lub
- (ii) na cyklu C leżą różne wierzchołki a, b, c, d (w tej kolejności cyklicznej) takie, że $\{a, c\} \subseteq V(B_1)$ i $\{b, d\} \subseteq V(B_2)$.

Twierdzenie 9.3. *Niech C będzie cyklem w grafie G . Wówczas G jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy (i) dla każdego C -mostu B graf $C \cup B$ jest planarny i (ii) graf $O(G, C)$ jest dwudzielny.*

Niech u i v będą dwoma różnymi wierzchołkami grafu G . Podzbiór wierzchołków X jest (u, v) -separatorem jeśli $\{u, v\} \cap X = \emptyset$ ale każda ścieżka z u do v przecina X . Spójną składową grafu $G - X$ zawierającą u nazywamy u -składową a jej zbiór wierzchołków oznaczamy przez $R(u, X)$. Analogicznie definiujemy v -składową. Mówimy, że (u, v) -separator jest *spójny* jeśli $G[X]$ jest spójny, oraz *cykliczny* jeśli $G[X]$ ma cykl Hamiltona.

Lemat 9.4. *Niech G będzie spójnym grafem, niech u i v będą jego różnymi wierzchołkami. Niech X_1 i X_2 będą dwoma rozłącznymi (u, v) -separatorami i niech $R_i = R(v, X_i)$ dla $i \in \{1, 2\}$. Wówczas albo $R_1 \cup X_1 \subseteq R_2$, albo $R_2 \cup X_2 \subseteq R_1$.*

Dowód. □

Niech (G, k) będzie instancją problemu PLANAR VERTEX DELETION. Wierzchołek $v \in V(G)$ nazywamy *nieistotnym wierzchołkiem* jeśli dla każdego podzbioru wierzchołków D o mocy co najwyżej k , graf $G - D$ jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy $G - (D \cup \{v\})$ jest planarny.

Lemat 9.5. *Niech (G, k) będzie instancją problemu PLANAR VERTEX DELETION. Załóżmy, że v jest takim wierzchołkiem grafu G , że istnieje wierzchołek $u \in V(G) \setminus \{v\}$ oraz ciąg parami rozłącznych cyklicznych (v, u) -separatorów X_1, \dots, X_{k+2} o następujących własnościach*

- (i) $X_i \subseteq R(v, X_{i+1})$ dla $i \in \{1, \dots, k + 1\}$ oraz
- (ii) graf $G[R(v, X_{k+2}) \cup X_{k+2}]$ jest planarny.

Wówczas v jest nieistotnym wierzchołkiem dla instancji (G, k)

Dowód. □

9.4. Disjoint Planar Vertex Set Deletion. Przypomnijmy twierdzenie o kracie dla grafów planarnych.

Twierdzenie 9.6 (o kracie dla grafów planarnych). *Dla każdego grafu planarnego G i dla każdej liczby naturalnej w ,*

$$\text{tw}(G) \geq 6w - 5 \implies \boxplus_w \preceq G.$$

Ponadto istnieje algorytm, który dla każdego n -wierzchołkowego grafu planarnego G i każdej liczby naturalnej w zwraca w czasie $\mathcal{O}(n^2)$ (1) dekompozycję drzewiastą G o szerokości co najwyżej $6w - 5$ lub (2) model minoru \boxplus_w w G .

Lemat 9.7. *Problem DISJOINT PLANAR VERTEX SET DELETION dla n -wierzchołkowych grafów można rozwiązać w czasie $g(k) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$. Ponadto, w przypadku pozytywnych instancji algorytm może w tym czasie zwrócić świadczący podzbiór co najwyżej k wierzchołków.*

W pozostałej części tej sekcji będziemy dowodzić lemat 9.7.

Ustalmy instancję (G, D, k) problemu DISJOINT PLANAR VERTEX SET DELETION. Ponieważ $G - D$ jest planarny z twierdzenia 9.6 dla $w = f(k) = (2k + 9) \cdot (k + 2)$ otrzymujemy (1) dekompozycję drzewiastą grafu $G - D$ o szerokości co najwyżej $6f(k)$ lub (2) model minoru $\boxplus_{f(k)}$ w $G - D$.

Jeśli otrzymaliśmy dekompozycję drzewiastą $G - D$ to po dodaniu do każdego worka zbioru D mamy dekompozycję drzewiastą grafu G o szerokości co najwyżej $6f(k) + |D| \leq 6f(k) + k + 1$. Wtedy korzystając z zaprojektowanego dynamika (czy też po prostu z twierdzenia Courcelle'a) mamy rozwiązujemy tę instancję w czasie $g(k) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

Pozostaje rozprawić się z przypadkiem gdy mamy model $\boxplus_{f(k)}$ w $G - D$. Niech $p = 2k + 5$ i wtedy $f(k) = (p + 4) \cdot (k + 2)$. Niech $H = \boxplus_{f(k)}$ i niech $(I_w)_{w \in V(H)}$ będzie otrzymanym modelem H w $G - D$.

10. GRAFY PLANARNE

Krzywą w przestrzeni topologicznej⁵ X , nazywamy ciągłą różnowartościową funkcję $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$. Punkty $\gamma(0)$ i $\gamma(1)$ nazywamy *końcami* krzywej γ . *Zanurzeniem* grafu G w przestrzeń X nazywamy taką funkcję φ która każdemu wierzchołkowi $v \in V(G)$ przyporządkowuje punkt $\varphi(v) \in X$ i każdej krawędzi $e \in E(G)$ przyporządkowuje krzywą $\varphi(e)$ w X , że

- $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ dla $u, v \in V(G)$, $u \neq v$;
- krzywa $\varphi(uv)$ ma końce w $\varphi(u)$ i $\varphi(v)$ dla $uv \in E(G)$;
- $\varphi(e_1)((0, 1)) \cap \varphi(e_2)((0, 1)) = \emptyset$ dla $e_1, e_2 \in E(G)$, $e_1 \neq e_2$;
- $\varphi(v) \notin \varphi_e((0, 1))$ dla $v \in V(G)$, $e \in E(G)$.

⁵Będziemy rozważać jedynie przestrzenie metryzowalne, więc czytelnik niezaznajomiony z topologią może utożsamiać przestrzenie topologiczne z przestrzeniami metrycznymi

Dla zanurzenia φ grafu G w X , zbiór $\varphi(V(G)) \cup \bigcup_{e \in E(G)} \varphi(e)([0, 1])$ oznaczamy przez $\varphi(G)$.

Zanurzenie grafu w \mathbb{R}^2 (z metryką euklidesową $d(x, y) = \|x - y\|_2$) nazywamy *zanurzeniem planarnym*. Graf jest *planarny* jeśli ma zanurzenie planarne. Dla zanurzenia planarnego φ , spójne składowe zbioru $\mathbb{R}^2 \setminus \varphi(G)$ nazywamy *ścianami* zanurzenia φ .

Twierdzenie 10.1 (Wzór Eulera). *Niech G będzie spójnym grafem planarnym o n wierzchołkach, m krawędziach i niech f oznacza liczbę ścian w pewnym jego zanurzeniu planarnym. Wówczas*

$$n - m + f = 2.$$

Powyższa definicja grafów planarnych jest zdefiniowana w terminach topologicznych i jest trudna w użyciu gdy chcemy udowodnić coś o grafach planarnych. Przedstawimy teraz kombinatoryczny opis grafów planarnych. Jedyne co nas będzie interesować o zanurzeniu, to cykliczna kolejność w jakiej krzywe odpowiadające krawędziom wychodzą z wierzchołków. Wzór Eulera będzie determinował czy taka kolekcja cyklicznych porządków gdzie dla każdego wierzchołka trzymamy cykliczny porządek krawędzi incydentnych z nim odpowiada pewnemu zanurzeniu planarnemu.

Systemem rotacji grafu G nazywamy taki indeksowany zbiór $\{\pi_v\}_{v \in V(G)}$, że dla każdego $v \in V(G)$, π_v jest cykliczną permutacją krawędzi incydentnych z v . Każde zanurzenie planarne grafu G wyznacza nam system rotacji w którym π_v oznacza cykliczną kolejność w jakiej krawędzie wychodzą z wierzchołka v w zanurzeniu (gdzie dla każdego v wybieramy tę samą orientację, na przykład przeciwnie do ruchu wskazówek zegara). System rotacji jest *planarny* jeśli pochodzi od jakiegoś zanurzenia planarnego.

Spacerem zamkniętym w grafie G nazywamy taki ciąg wierzchołków $(v_0 \cdots v_k)$, że $v_i v_{i+1} \in E(G)$ dla $i = 0, \dots, k-1$ oraz $v_k = v_0$. Każdy spacer zamknięty $(v_0 \cdots v_k)$ utożsamiamy z jego *przesunięciami cyklicznymi* postaci $(v_i \cdots v_k v_1 \cdots v_i)$ dla $i = 1, \dots, k-1$. Ustalmy graf G . Dla systemu rotacji $\pi = \{\pi_v\}_{v \in V(G)}$ grafu G , π -*spacerem* w G nazywamy spacer zamknięty w grafie G który albo jest postaci (v_0) dla pewnego wierzchołka izolowanego v_0 grafu G , albo jest takim spacerem zamkniętym $(v_0 \cdots v_k)$, że $v_i v_{i+1} = \pi_{v_i}(v_{i-1} v_i)$ dla $i = 1, \dots, k-1$, $v_0 v_1 = \pi_{v_0}(v_{k-1} v_k)$ i skierowane krawędzie $v_i v_{i+1}$ dla $i \in \{0, \dots, k-1\}$ są parami różne. Jeśli wierzchołki v_0, \dots, v_{k-1} są parami różne, to mówimy, że π -spacer jest *cykliczny*.

Niech G będzie grafem o c spójnych składowych, n wierzchołkach i m krawędziach. Niech π będzie systemem rotacji grafu G i załóżmy, że istnieje dokładnie f różnych π -spacerów. Wówczas liczbę

$$\mathbf{g}(G, \pi) = c - (n - m + f)/2$$

nazywamy *genusem* grafu G w systemie rotacji π . *Genus* $\mathbf{g}(G)$ grafu G definiujemy jako minimalny genus grafu G w jakimkolwiek systemie rotacji.

Twierdzenie 10.2. *System rotacji π grafu G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{g}(G, \pi) = 0$.*

Lemat 10.3. *Grafy K_5 i $K_{3,3}$ są nieplanarne.*

Dowód. Graf K_5 ma $n = 5$ wierzchołków i $m = 10$ krawędzi, a skoro każda krawędź występuje dwa razy na π -spacerach w K_5 dla każdego systemu rotacji π grafu K_5 i każdy π -spacer ma długość co najmniej 3, to liczba ścian f spełnia $f \leq \frac{2}{3}m < 7$. Stąd $\mathbf{g}(G) > 1 - (5 - 10 + 7)/2 = 0$, czyli G nie jest planarny.

W przypadku grafu $K_{3,3}$, mamy $n = 6$ i $m = 9$, a skoro $K_{3,3}$ jest dwudzielny, to dla każdego systemu rotacji π grafu $K_{3,3}$, każdy π -spacer w $K_{3,3}$ ma długość co najmniej 4. Stąd $f \leq \frac{2}{4}m < 5$. Zatem $\mathbf{g}(G) > 1 - (6 - 9 + 5) = 0$, czyli G nie jest planarny. \square

Jeśli $\pi = \{\pi_v\}_{v \in V(G)}$ jest systemem rotacji grafu G , to dla każdego podgrafu H grafu G definiujemy system rotacji π' indukowany przez π gdzie $\pi'_v(e)$ jest pierwszą krawędzią w ciągu $\pi_v(e), \pi_v^2(e), \dots$ która należy do H . Dla podgrafu $H \subseteq G$, każdy π' -spacer w H nazywamy π -spacerem w G , a genus grafu H w π' oznaczamy przez $\mathbf{g}(H, \pi)$.

Lemat 10.4. *Niech G będzie grafem a π jego systemem rotacji. Wówczas*

- (i) $\mathbf{g}(G, \pi)$ jest nieujemną liczbą całkowitą,
- (ii) dla każdego podgrafu H grafu G zachodzi $\mathbf{g}(H, \pi) \leq \mathbf{g}(G, \pi)$ i
- (iii) dla każdego minoru H grafu G zachodzi $\mathbf{g}(H) \leq \mathbf{g}(G)$.

Dowód. Zauważmy, że jeśli $E(G) = \emptyset$, to $\mathbf{g}(G, \pi) = 0$. Stąd, dla dowodu (i) i (ii) wystarczy pokazać, że dla dowolnej krawędzi $e \in E(G)$, $\mathbf{g}(G, \pi) - \mathbf{g}(G - e, \pi)$ jest nieujemną liczbą całkowitą. To wynika stąd, że $G - e$ ma tyle wierzchołków co G , o jedną krawędź mniej, liczba π -spacerów rośnie lub maleje o dokładnie 1, a ponadto $G - e$ ma nie mniej spójnych składowych niż G .

Na mocy (ii), dla dowodu (iii), wystarczy pokazać, że jeśli $uv \in E(G)$ i $N_G(u) \cap N_G(v) = \emptyset$, to istnieje taki system rotacji π' grafu G/e , że $\mathbf{g}(G/e, \pi') \leq \mathbf{g}(G, \pi)$. Taki system rotacji możemy otrzymać z π , zastępując lokalne rotacje π_u i π_v lokalną rotacją π_e :

$$\begin{aligned} \pi_u(e) \rightarrow \pi_u^2(e) \rightarrow \dots \rightarrow \pi^{d(u)-1}(e) \\ \rightarrow \pi_v(e) \rightarrow \pi_v^2(e) \rightarrow \dots \rightarrow \pi^{d(v)-1}(e) \rightarrow \pi_u(e). \end{aligned}$$

Dla tak otrzymanego systemu rotacji π' , liczba π' -spacerów w G/e jest równa liczbie π -spacerów w G . Skoro $|V(G/e)| = |V(G)| - 1$ i $|E(G/e)| = |E(G)| - 1$, to $\mathbf{g}(G/e, \pi') = \mathbf{g}(G, \pi)$. \square

Każdy minor grafu planarnego jest planarny, więc na mocy lematu 10.3, żaden graf planarny nie zawiera $K_{3,3}$ ani K_5 jako minoru topologicznego.

Twierdzenie 10.5 (Twierdzenie Wagnera). *Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera $K_{3,3}$ ani K_5 jako minoru.*

Każda własność grafu która może być scharakteryzowana przez skończoną listę zabronionych minorów, może być też scharakteryzowana przez skończoną listę minorów

topologicznych. W przypadku grafów planarnych tak się składa, że ta lista jest taka sama.

Twierdzenie 10.6 (Twierdzenie Kuratowskiego). *Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera $K_{3,3}$ ani K_5 jako minoru topologicznego.*

Twierdzenia Wagnera i Kuratowskiego są równoważne, a nietrywialna implikcja tej równoważności sprowadza się do następującego lematu.

Lemat 10.7. *Jeśli graf zawiera $K_{3,3}$ lub K_5 jako minor, to zawiera również $K_{3,3}$ lub K_5 jako minor topologiczny.*

Dowód. Skoro maksymalny stopień grafu $K_{3,3}$ wynosi 3, to każdy graf zawierający $K_{3,3}$ jako minor, zawiera również $K_{3,3}$ jako minor topologiczny.

Założmy, że graf G zawiera K_5 jako minor i ustalmy model $\{H_i\}_{i=1}^5$ grafu K_5 w G . Jeśli K_5 nie jest minorem topologicznym grafu G , to możemy tak przenieść numery grafy w $\{H_i\}_{i=1}^5$, że H_1 zawiera takie dwa rozłączne, spójne i połączone krawędzią podgrafy H'_1 i H''_1 grafu H_1 , że H'_1 sąsiaduje z H_2 i H_3 , a H''_1 sąsiaduje z H_4 i H_5 . Dostajemy więc model grafu $K_{3,3}$ gdzie wierzchołki jednej strony są modelowane grafami H'_1 , H_4 i H_5 , a wierzchołki drugiej strony są modelowane grafami H''_1 , H_2 i H_3 . \square

Lemat 10.8. *Jeśli G jest 2-spójnym grafem a π jest jego planarnym systemem rotacji, to każdy π -spacer jest cykliczny.*

Dowód. Założmy nie wprost, że istnieje ściana $v_0 \cdots v_{k-1}v_0$ która nie jest cykliczna, powiedzmy $v_i = v_j =: v$. Rozważmy graf G' powstały z G przez dodanie dwóch nowych wierzchołków u_1 i u_2 oraz krawędzi vu_1 , vu_2 i u_1u_2 . Rozszerzmy π grafu G do planarnego systemu rotacji π' grafu G' , wstawiając w π_v krawędź vu_1 między vv_{i-1} a vv_{i+1} , a krawędź vu_2 między vv_{j-1} a vv_{j+1} . Jeśli w systemie rotacji $\{\pi_v\}_{v \in V(G)}$ liczba wierzchołków, krawędzi i ścian wynosi odpowiednio n , m i f , to w $\{\pi'_v\}_{v \in V(G')}$ te liczby wynoszą odpowiednio $n' = n + 2$, $m' = m + 3$, $f' = f + 1$. Zatem

$$\mathbf{g}(G', \pi') = 2 - (n' - m' + f') = 2 - (n - m + f) = \mathbf{g}(G, \pi) = 0,$$

czyli system rotacji π' jest planarny.

Skoro graf G jest 2-spójny, to $G - v_0$ zawiera $v_1 - v_{k-1}$ ścieżkę P . Rozważmy graf H będący sumą cykli vu_1u_2v oraz $vv_1Pv_{k-1}v$. System rotacji $\{\pi'_v\}_{v \in V(G')}$ indukuje w nim system rotacji w którym liczba wierzchołków, krawędzi i ścian wynosi odpowiednio $n'' = |V(P)| + 3$, $m'' = |V(P)| + 4$ i $f'' = 1$, więc

$$\mathbf{g}(H, \pi') = 2 - (n'' - m'' + f'') = 2.$$

To stoi w sprzeczności z tym, że $\mathbf{g}(H, \pi') \leq \mathbf{g}(G', \pi') = 0$. \square

Dla podgrafu H grafu G , H -mostem nazywamy spójny podgraf grafu G który jest albo krawędzią grafu spoza H ale mającą oba końce w H (końce tej krawędzi również należą do mostu), albo spójną składową grafu $G - V(H)$ razem ze wszystkimi

krawędziami (i ich końcami) które mają jeden koniec w tej składowej a drugi w H . Wierzchołkami przyłączenia H -mostu B nazywamy wierzchołki przecięcia $B \cap H$.

Lemat 10.9. *Niech $C = v_0 \cdots v_k$ będzie cyklem ($v_0 = v_k$) w grafie G i niech π będzie planarnym systemem rotacji grafu G . Wówczas dla każdego C -mostu B , któryś z zamkniętych spacerów ($v_0 \cdots v_k$) lub ($v_k v_{k-1} \cdots v_0$) jest π -spacerem w $C \cup B$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że dla pewnego C -mostu B teza nie zachodzi. Wówczas dla systemu rotacji π' grafu $C \cup B$ istnieją takie $i, j \in \{0, \dots, k\}$, że $\pi'_{v_i}(v_{i-1}v_i) \neq v_i v_{i+1}$ oraz $\pi'_{v_j}(v_j v_{j+1}) \neq v_{j-1} v_j$. Niech $W = w_0 \cdots w_\ell$ będzie takim spacerem w B , że $w_0 = v_i$, $w_0 w_1 = \pi'_{v_i}(v_{i-1}v_i)$, $w_\ell = v_j$, $w_{\ell-1} w_\ell = \pi'_{v_j}(v_j v_{j+1})$ oraz $w_1, \dots, w_{\ell-1}$ są parami różnymi wierzchołkami spoza C . Wówczas w grafie $C \cup W$ jest tylko jeden π -spacer:

$$(v_0 \cdots v_i w_1 \cdots w_{\ell-1} v_j v_{j-1} \cdots v_0 v_{k-1} \cdots v_j w_{\ell-1} \cdots w_1 v_i \cdots v_{k-1} v_0).$$

Stąd

$$\mathbf{g}(C \cup W, \pi) = 1 - ((k + \ell - 1) - (k + \ell) + 1)/2 = 1 > 0 = \mathbf{g}(G, \pi),$$

sprzeczność. \square

Lemat 10.10. *Niech G będzie grafem a π jego planarnym systemem rotacji. Niech $W = (v_0 \cdots v_{k-1} v_0)$ będzie π -spacerem cyklicznym w G i niech B_1 i B_2 będą różnymi W -mostami. Wówczas nie istnieją takie parami różne wierzchołki a, b, c, d leżące na W w tej kolejności, że $\{a, c\} \subseteq V(B_1)$ i $\{b, d\} \subseteq V(B_2)$.*

Dowód. Załóżmy, że takie a, b, c, d istnieją. Niech P_1 będzie a - c ścieżką w B_1 rozłączną poza końcami z W i niech P_2 będzie b - d ścieżką w B_2 rozłączną poza końcami z W . Wówczas $W \cup P_1 \cup P_2$ ma tylko jeden π -spacer, więc $\mathbf{g}(W \cup P_1 \cup P_2) > 0$ co przeczy planarności systemu rotacji π . \square

Twierdzenie 10.11 (Tutte). *Niech G będzie 3-spójnym grafem a π jego planarnym systemem rotacji. Wówczas dla każdego cyklu $C = v_0 \cdots v_{k-1} v_0$ w G , następujące warunki są równoważne*

- (i) *któryś ze spacerów zamkniętych $v_0 \cdots v_{k-1} v_0$ lub $v_{k-1} v_{k-2} \cdots v_0 v_{k-1}$ jest π -spacerem w G ;*
- (ii) *istnieje dokładnie jeden C -most.*

Dowód. Załóżmy, że $(v_0 \cdots v_{k-1} v_0)$ jest π -spacerem w G . Skoro G jest 3-spójny, istnieje C -most B . Załóżmy najpierw, że $|V(B)| = 2$, to znaczy B jest krawędzią $v_i v_j$ razem z jej końcami. Wówczas z 3-spójności grafu G dostajemy, że $G - \{v_i, v_j\}$ zawiera ścieżkę między dwoma spójnymi składowymi $C - \{v_i, v_j\}$. Wówczas otrzymujemy sprzeczność z lematem 10.10. Możemy więc założyć, że każdy C -most ma co najmniej 3-wierzchołki.

Założmy, że istnieją różne C -mosty B i B' . Wówczas z 3-spójności grafu G istnieją 3 rozłączne $V(B)$ - $V(B')$ ścieżki P_1, P_2 i P_3 w G . Skoro $(v_0 \cdots v_{k-1} v_0)$ jest π -spacerem w G , to graf G' otrzymany z G przez dodanie nowego wierzchołka u sąsiadującego z wszystkimi wierzchołkami na C jest planarny. Jednakże w tym

grafie znajdziemy model $K_{3,3}$ w którym wierzchołki są modelowane podgrafami $G[\{u\}], V(B) \setminus V(C), V(B') \setminus V(C)$ oraz $P_1 - V(B \cup B'), P_2 - V(B \cup B'), P_3 - V(B \cup B')$, co stoi w sprzeczności z nieplanarnością $K_{3,3}$. \square

11. POWIERZCHNIE

Powszechnie wiadomo, że wielościan to bryła geometryczna, która jest ograniczona przez sumę jej ścian. Każda ścian awielościanu jest wielokątem, a każda krawędź wielościanu jest wspólną krawędzią dwóch jego ścian. Suma ścian wielościanu jest tak zwaną powierzchnią wielościanową i jest szczególnym przypadkiem powierzchni, czyli takich zwartych przestrzeni topologicznych, w których każdy punkt leży w zbiorze otwartym homeomorficznym z \mathbb{R}^2 . Każdą powierzchnię możemy otrzymać, podobnie jak powierzchnię wielościanową, z rodziny wielokątów przez utożsamienie ze sobą niektórych par boków tych wielokątów.

11.1. Definicja i przykłady. *Powierzchnią* nazywamy zwartą i spójną przestrzeń topologiczną w której każdy punkt należy do otwartego zbioru, który jest homeomorficzny z płaszczyzną \mathbb{R}^2 . *Powierzchnią z brzegiem* nazywamy zwartą i spójną przestrzeń topologiczną w której każdy punkt należy do otwartego zbioru, który jest homeomorficzny z płaszczyzną \mathbb{R}^2 lub półpłaszczyzną $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. *Brzegiem* powierzchni z brzegiem nazywamy zbiór wszystkich punktów, które nie leżą w żadnym zbiorze otwartym homeomorficznym z \mathbb{R}^2 .

Przykład 11.1. Płaszczyzna \mathbb{R}^2 nie jest powierzchnią, gdyż nie jest przestrzenią zwartą.

Przykład 11.2 (Koło domknięte). Koło domknięte w \mathbb{R}^2 jest powierzchnią z brzegiem której brzegiem jest okrąg o tym samym środku i promieniu co to koło.

Przykład 11.3 (Sfera). Sfera $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_3 = 1\}$ z topologią zadaną przez metrykę euklidesową w \mathbb{R}^3 jest powierzchnią.

Jeśli d jest metryką na zbiorze X a \sim jest relacją równoważności na (podzbiorze) X , to na zbiorze X/\sim klas równoważności zadajemy *pseudometrykę ilorazową*

$$d'([x]_{\sim}, [y]_{\sim}) = \inf d(x_0, y_0) + \dots + d(x_k, y_k)$$

gdzie infimum przebiega po wszystkich takich ciągach $x = x_0, y_0, \dots, x_k, y_k = y$, że $y_i \sim x_{i+1}$ dla $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Jeśli $d'([x]_{\sim}, [y]_{\sim}) \neq 0$ dla $[x]_{\sim} \neq [y]_{\sim}$, to d' jest metryką którą nazywamy *metryką ilorazową*, a zbiór X/\sim z metryką d' nazywamy *przestrzenią ilorazową*.

Przykład 11.4 (Cylinder). Jeśli w kwadracie $[-1, 1] \times [-1, 1]$ rozważymy najmniejszą taką relację równoważności \sim , że $(-1, y) \sim (1, y)$ dla $y \in [-1, 1]$, to $([-1, 1] \times [-1, 1])/\sim$ jest powierzchnią z brzegiem nazywamy *cylindrem*. Tak zdefiniowana powierzchnia jest homeomorficzna z powierzchnią boczną walca oraz z pierścieniem $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \|(x, y)\|_2 \leq 2\}$.

Przykład 11.5 (Wstęga Möbiusa). Jeżeli w kwadracie $[-1, 1] \times [-1, 1]$ rozważymy najmniejszą taką relację równoważności \sim , że $(-1, y) \sim (1, -y)$ dla każdego $y \in [-1, 1]$, to $([-1, 1] \times [-1, 1])/\sim$ jest powierzchnią z brzegiem zwaną *wstęgą Möbiusa*.

Ogólniej, powierzchnie z brzegiem można otrzymać za pomocą następującej konstrukcji.

Niech \mathcal{F} będzie rodziną rozłącznych wypukłych wielokątów na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 , którego wszystkie boki mają długość 1. Połączmy w rozłączne pary niektóre boki wielokątów z \mathcal{F} . Dla każdej połączonej pary boków $\{\sigma, \sigma'\}$, wybierzmy jeden z dwóch izomorfizmów odcinków σ i σ' . Oznaczmy przez R sumę tych izomorfizmów traktowanych jako relacje binarne na \mathbb{R}^2 . Niech \sim będzie relacją równoważności na F otrzymaną przez domknięcie zwrotne, symetryczne i przechodnie relacji R . Wówczas na zbiorze $(\cup \mathcal{F})/\sim$ mamy zadaną metrykę ilorazową. Jeśli wszystkie boki wielokątów z \mathcal{F} zostały połączone w pary, to otrzymana przestrzeń ilorazowa jest powierzchnią. Jeśli jakieś boki nie zostały połączone w pary, to otrzymamy powierzchnię z niepustym brzegiem a brzegiem jest zbiór punktów na tych bokach które nie zostały połączone w pary.

Przykład 11.6 (Torus). Rozważmy powierzchnię otrzymaną z kwadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ przez utożsamienie ze sobą obu par naprzeciwległych boków w taki sposób, że utożsamiamy ze sobą punkty $(x, -1)$ i $(x, 1)$ dla $x \in [-1, 1]$ oraz $(-1, y)$ i $(1, y)$ dla $y \in [-1, 1]$. Otrzymaną w ten sposób powierzchnię nazywamy *torusem*.

Przykład 11.7 (Płaszczyzna rzutowa rzeczywista). Rozważmy teraz powierzchnię otrzymaną z kwadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ przez utożsamienie ze sobą par naprzeciwległych boków w taki sposób, że każdy punkt brzegowy (x, y) zostaje utożsamiony z naprzeciwległym punktem $(-x, -y)$. Powierzchnię tę nazywamy *płaszczyzną rzutową rzeczywistą*. W odróżnieniu od wcześniejszych przykładów, powierzchnia ta nie jest homeomorficzna z żadnym podzbiorem \mathbb{R}^3 .

11.2. Operacje na powierzchniach. Przedstawimy teraz dwie operacje za pomocą których możemy z jednych powierzchni otrzymać nowe. Pierwsza operacja będzie polegać na wycięciu dwóch dziur w powierzchni a następnie sklejenie ich brzegów z brzegiem cylindra. Druga operacja będzie polegać na wycięciu jednej dziury w powierzchni a następnie sklejenie jej brzegu z brzegiem wstęgi Möbiusa. Formalnie, operacje tę definiujemy następująco.

Niech Σ będzie powierzchnią z brzegiem i niech $U \subseteq \Sigma$ będzie podzbiorem homeomorficznym z \mathbb{R}^2 . Po przemianowaniu punktów powierzchni Σ możemy założyć, że homeomorfizm z U w \mathbb{R}^2 jest identycznością. Niech D_1 i D_2 będą rozłącznymi kołami domkniętymi w \mathbb{R}^2 o promieniu 1. Dla $i = 1, 2$, niech c_i , $\text{int}(D_i)$, $\text{bd}(D_i)$ oznaczają odpowiednio środek, wnętrze i brzeg koła D_i . Niech \sim_1 będzie relacją równoważności na $\text{bd}(D_1) \cup \text{bd}(D_2)$ która utożsamia brzegi $\text{bd}(D_1)$ i $\text{bd}(D_2)$ z przeciwnymi orientacjami (czyli na przykład możemy utożsamiać każdy punkt $c_1 + (x, y) \in \text{bd}(D_1)$ z punktem $c_2 + (-x, y) \in \text{bd}(D_2)$). Wówczas $\Sigma_1 = (\Sigma \setminus (\text{int}(D_1) \cup \text{int}(D_2)))/\sim_1$ jest powierzchnią z brzegiem, o której mówimy, że powstała z Σ_1 przez *doklejenie rączki*. Niech \sim_2 będzie relacją równoważności na $\text{bd}(D_1)$ która utożsamia wszystkie

pary naprzeciwległych punktów x i y w $\text{bd}(D_1)$ (czyli takie pary, że $(x + y)/2 = c_1$). Wówczas $\Sigma_2 = (\Sigma \setminus \text{int}(D_1))/\sim_2$ jest powierzchnią z brzegiem która powstają z Σ przez *doklejenie wstęgi Möbiusa*. Wszystkie powierzchnie które można otrzymać z Σ przez doklejenie rączki (wstęgi Möbiusa) są homeomorficzne.

Powierzchnię powstałą ze sfery S^2 przez doklejenie g rączek (lub homeomorficzną), nazywamy *powierzchnią orientowalną o genusie g* , a powierzchnię powstałą ze sfery S^2 przez doklejenie g wstęg Möbiusa (lub homeomorficzną) nazywamy *powierzchnią nieorientowalną o genusie g* .

11.3. Klasyfikacja powierzchni.

Twierdzenie 11.8. *Powierzchnia powstała ze sfery przez doklejenie $h > 0$ rączek i $c > 0$ wstęg Möbiusa jest powierzchnią nieorientowalną o genusie $2h + c$.*

Twierdzenie 11.9. *Każda powierzchnia jest albo powierzchnią orientowalną o genusie g dla dokładnie jednego $g \geq 0$ albo powierzchnią nieorientowalną o genusie g dla dokładnie jednego $g > 1$.*

Każda powierzchnia z brzegiem powstaje z pewnej powierzchni przez wycięcie wewnątrz pewnej liczby parami rozłącznych kół. Zatem każda powierzchnia z brzegiem jest wyznaczona z dokładnością do homeomorfizmu przez orientowalność, genus i liczbę dziur.

Genusem Eulera $eg(\Sigma)$ powierzchni Σ nazywamy liczbę $2g$ jeśli Σ jest powierzchnią orientowalną o genusie g lub liczbę g jeśli Σ jest powierzchnią nieorientowalną o genusie g .

12. ZANURZENIA W POWIERZCHNIE KOMBINATORYCZNE

*Schematem zanurzenia grafu G nazywamy parę (π, λ) gdzie π jest systemem rotacji grafu G , a λ jest *sygnaturą*, czyli funkcją przypisującą każdej krawędzi $e \in E(G)$ znak $\lambda(e) \in \{-1, +1\}$. Sygnatura jest *pozytywna* jeśli $\lambda(e) = +1$ dla każdej krawędzi $e \in E(G)$.*

Niech $\Pi = (\pi, \lambda)$ będzie schematem zanurzenia grafu G . Niech $v_0v_1 \in E(G)$ i $s_0 \in \{-1, +1\}$. Niech $(v_0, s_0), (v_1, s_1), \dots$ będzie takim ciągiem par (wierzchołek, znak), że $v_i v_{i+1} = \pi_{v_i}^{s_i}(v_i v_{i-1})$ oraz $s_i = \lambda(v_{i-1} v_i) \cdot s_{i-1}$ dla $i \geq 1$. Jeśli k jest najmniejszym takim indeksem, że $v_k = v_0, v_{k+1} = v_1$ i $s_k = s_0$, to ciąg $(v_0, s_0), (v_1, s_1), \dots, (v_{k-1}, s_{k-1})$ nazywamy Π -spacerem w G . Każdy taki Π -spacer utożsamiamy z jego przesunięciami cyklicznymi oraz z Π -spacerem $(v_k, -s_k), \dots, (v_1, -s_1)$ i jego przesunięciami cyklicznymi. Mówimy, że Π -spacerowi $(v_0, s_0), (v_1, s_1), \dots, (v_{k-1}, s_{k-1})$ odpowiadają spacery zamknięte $(v_0 \cdots v_{k-1} v_0)$ oraz $(v_k v_{k-1} \cdots v_1 v_k)$.

Lokalna zmiana schematu zanurzenia (π, λ) grafu G w wierzchołku v polega na zastąpieniu π_v przez π_v^{-1} oraz $\lambda(e)$ przez $-\lambda(e)$ dla każdej krawędzi e incydentnej

z v . Dwa schematy zanurzeń są *równoważne* jeśli jeden z nich można otrzymać z drugiego za pomocą ciągu lokalnych zmian.

Lemat 12.1. *Dwa schematy zanurzeń Π i Π' grafu G są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy zbiór wszystkich spacerów odpowiadających Π -spacerom w G jest równy zbiorowi wszystkich spacerów odpowiadających Π' -spacerom w G .*

Dla każdego Π -spaceru $(v_0, s_0), \dots, (v_{k-1}, s_{k-1})$, zachodzi $\prod_{i=0}^{k-1} \lambda(v_i v_{i+1}) = +1$. Jeśli dla jakiegokolwiek cyklu C w G zachodzi $\prod_{e \in E(C)} \lambda(e) = -1$, to mówimy, że schemat Π jest *nieorientowalny*, a w przeciwnym razie, że jest *orientowalny*.

Lemat 12.2. *Schemat zanurzenia jest orientowalny wtedy i tylko wtedy gdy jest równoważny schematowi o pozytywnej sygnaturze.*

Niech G będzie grafem o c spójnych składowych, n wierzchołkach i m krawędziach. Niech Π będzie schematem zanurzenia grafu G i załóżmy, że istnieje dokładnie f różnych Π -spacerów w G . Wówczas liczbę

$$\mathbf{eg}(G, \Pi) = 2c - (n - m + f)$$

nazywamy *Genusem Eulera* grafu G w schemacie zanurzenia Π . *Genus Eulera* $\mathbf{eg}(G)$ grafu G definiujemy jako minimalny genus grafu G w jakimkolwiek systemie rotacji.

Jeśli $\Pi = (\pi, \lambda)$ jest schematem zanurzenia grafu G , to dla każdego podgrafu H grafu G definiujemy schemat zanurzenia $\Pi' = (\pi', \lambda')$ indukowany przez Π gdzie π' jest systemem rotacji grafu H indukowanym przez π a λ' jest zawężeniem λ do $E(H)$. Każdy Π' -spacer w H nazywamy Π -spacerem w H , a genus grafu H w Π' oznaczamy przez $\mathbf{eg}(H, \Pi)$,

Twierdzenie 12.3. *Graf G da się zanurzyć w orientowalną powierzchnię o genusie g wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taki orientowalny schemat zanurzenia Π , że $\mathbf{eg}(G, \Pi) \leq 2g$.*

Twierdzenie 12.4. *Graf G da się zanurzyć w nieorientowalną powierzchnię o genusie g wtedy i tylko wtedy gdy istnieje taki schemat zanurzenia Π , że albo $\mathbf{eg}(G, \Pi) < g$, lub $\mathbf{eg}(G, \Pi) = g$ i Π jest nieorientowalny.*

Lemat 12.5. *Niech G będzie grafem a Π jego schematem zanurzenia. Wówczas*

- (i) $\mathbf{eg}(G, \Pi)$ jest nieujemną liczbą całkowitą,
- (ii) dla każdego podgrafu H grafu G zachodzi $\mathbf{eg}(H, \Pi) \leq \mathbf{eg}(G, \Pi)$ i
- (iii) dla każdego minoru H grafu G zachodzi $\mathbf{eg}(H) \leq \mathbf{eg}(G)$.

Dowód. Analogicznie do 10.4. Jedyne różnice są takie, że $G - e$ może mieć tyle samo ścian co G i w konstrukcji schematu zanurzenia grafu G/uv trzeba dokonać lokalnej zmiany w u lub v jeśli $\lambda(e) = -1$. \square

Podobnie jak w przypadku systemów rotacji mamy $f \leq \frac{2}{3}m$. To oznacza, że dla $n \geq 3$, genus Eulera grafu pełnego K_n wynosi co najmniej $2 - (n - \frac{1}{3}\binom{n}{2})$, czyli co najmniej $\lceil (n - 3)(n - 4)/6 \rceil$. Okazuje się, że to proste ograniczenie jest najlepsze

możliwe. Wynika to z twierdzenia Ringela-Youngsa, które rozstrzyga jak duży graf zupełny da się zanurzyć w każdą powierzchnię.

Twierdzenie 12.6 (Ringel-Youngs). *Jeśli Σ jest powierzchnią nieorientowalną o genusie 2, to K_n da się zanurzyć w Σ wtedy i tylko wtedy gdy $n \leq 6$. Dla każdej innej powierzchni Σ , K_n da się zanurzyć w Σ wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(n-3)(n-4)/6 \leq \mathbf{eg}(\Sigma).$$

13. MINIMALNE NIEZANURZALNE GRAFY

Dla nieujemnej liczby całkowitej k , *heksagonalna krata J_k* to graf

$$V(J_k) = \{(x, y, z) \in \{-k+1, \dots, k\}^3 \mid x+y+z \in \{1, 2\}\}$$

w którym dwa wierzchołki (x, y, z) i (x', y', z') są połączone krawędzią jeśli $|x-x'| + |y-y'| + |z-z'| = 1$.

Dla $k \geq 1$, podgraf $J_k - V(J_{k-1})$ grafu J_k jest cyklem długości $6k$, który nazywamy *cyklem zewnętrznym* kraty J_k i oznaczamy przez C_k . Jeśli mamy ustalony model topologiczny $\{P_e\}_{e \in E(J_k)}$ grafu J_k , to dla każdego podgrafu $D \subseteq J_k$, przez \tilde{D} oznaczamy graf $\bigcup_{e \in E(D)} P_e$.

Mówimy, że model topologiczny kraty J_k w grafie G jest *dobry* w G jeśli suma \tilde{J}_k oraz wszystkich \tilde{J}_k -mostów mających wierzchołek przyłączenia w \tilde{J}_{k-1} jest planarny.

Lemat 13.1. *Niech G będzie grafem o genusie Eulera g i niech m i k będą takimi dodatnimi liczbami całkowitymi, że $m \geq (2g+3)(2k+1)$. Wówczas, jeśli J_m jest minorem G , to G zawiera model topologiczny kraty J_k który jest dobry w G .*

Dowód. Skoro $m \geq (2g+3)(2k+1)$, to w kracie J_m możemy znaleźć takie rozłączne kopie Q_1, \dots, Q_{2g+1} kraty J_k , że graf $J_m - \bigcup_{i=1}^{2g+1} V(Q_i)$ jest spójny i jest połączony krawędziami ze wszystkimi wierzchołkami stopnia 2 w kratkach Q^1, \dots, Q^{2g+1} . (Dociekliwy czytelnik może sprawdzić, że powyższe warunki spełniają grafy

$$Q_i = J_m[\{(x+i \cdot (2k+1), y-i \cdot (2k+1), z) : (x, y, z) \in V(J_k)\}].$$

Dla każdego $i \in \{1, \dots, 2g+1\}$, oznaczmy przez Q'_i kopię J_{k-1} w Q_i .

Ustalmy model topologiczny kraty J_m w G . Dla każdego $i \in \{1, \dots, 2g+1\}$, graf Q_i jako kopia J_k w J_m , indukuje model topologiczny kraty J_k w \tilde{Q}_i . Wykażemy, że co najmniej jeden z tych modeli jest dobry w G .

Założmy niewprost, że żaden z tych modeli nie jest dobry w G . Wówczas konstruujemy taki wstępujący ciąg spójnych grafów $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_{g+1} \subseteq G$, że

- (i) $M_0 = \tilde{J}_m - \bigcup_{i=1}^{2g+1} V(\tilde{Q}_i)$.
- (ii) dla każdego $i \in \{0, \dots, g\}$, M_i przecina co najwyżej $2i$ spośród grafów $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{2g+1}$ oraz

(iii) $\mathbf{eg}(M_i) \geq i$ dla $i \in \{0, \dots, g+1\}$.

Warunek (iii) dla $i = g+1$ da nam $\mathbf{eg}(G) \geq \mathbf{eg}(M_{g+1}) \geq g+1$, co będzie oczekiwaną sprzecznością.

Niech $i \in \{0, \dots, g\}$ i załóżmy, że skonstruowaliśmy graf M_i spełniający warunki (ii) i (iii). Wówczas pokażemy jak skonstruować M_{i+1} . Dzięki (ii), istnieje $j \in \{1, \dots, 2g+1\}$, że $V(M_i) \cap V(\tilde{Q}_j) = \emptyset$. Ustalmy takie j . Oznaczmy przez H sumę wszystkich \tilde{Q}_j -mostów przecinających \tilde{Q}'_j . Skoro model J_k indukowany przez Q_j nie jest dobry, graf $\tilde{Q}_j \cup H$ jest nieplanarny. Jeśli $V(M_0) \cap V(H) = \emptyset$, to $M_i \cap H = \emptyset$. Zatem $\mathbf{eg}(M_i \cup \tilde{Q}_j \cup H) \geq i+1$ więc możemy wziąć $M_{i+1} = (M_i \cup \tilde{Q}_j \cup H) + e$, gdzie e jest dowolną krawędzią między \tilde{Q}_j a M_0 w G .

Możemy więc założyć, że $V(H) \cap V(M_0) \neq \emptyset$ a więc $M_i \subseteq H$. W grafie H istnieje więc taka ścieżka P , która ma jeden koniec w \tilde{Q}'_j a drugi w takim wierzchołku \tilde{Q}_j sąsiadującym z M_0 , że $\tilde{Q}_j \cup P$ jest grafem nieplanarnym. Ustalmy taką ścieżkę P , która dodatkowo będzie przecinać co najwyżej jeden z grafów $\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_{2g+1}$ poza \tilde{Q}_j . W tym przypadku możemy zdefiniować $M_{i+1} = M_i \cup \tilde{Q}_j \cup P$. Przekonajmy się, że $\mathbf{eg}(M_{i+1}) > \mathbf{eg}(M_i)$. Niech B będzie M_i -mostem w M_{i+1} zawierającym \tilde{Q}_j . Most B zawiera dokładnie dwie krawędzie incydentne z wierzchołkami przyłączenia w M_i . Gdyby te dwie krawędzie były zanurzone „wewnątrz” różnych ścian zanurzenia grafu M_i indukowanego przez Π , to automatycznie mielibyśmy $\mathbf{eg}(M_{i+1}) > \mathbf{eg}(M_i)$. Możemy więc założyć, że obie te krawędzie leżą „wewnątrz” tej samej ściany, jednak wówczas gdybyśmy mieli $\mathbf{eg}(M_{i+1}) = \mathbf{eg}(M_i)$, to prosty rachunek dowodzi, że indukowane zanurzenie grafu $\tilde{Q}'_j \cup P$ jest planarne, co jest sprzecznością. To kończy konstrukcję M_{i+1} . \square

Lemat 13.2. Niech Σ będzie powierzchnią, niech $g = \mathbf{eg}(\Sigma)$ i niech $k = 2g+3$. Niech G będzie grafem zawierającym dobry model topologicznym kraty J_k iniech $e_0 \in E(\tilde{J}_1)$. Wówczas jeśli $G - e_0$ da się zanurzyć w Σ , to G również da się zanurzyć w Σ .

Dowód. Zauważmy, że możemy zawęzić naszą uwagę do spójnej składowej grafu G zawierającej \tilde{J}_k . Załóżmy więc, że graf G jest spójny. Ustalmy zanurzenie Π grafu $G - e_0$ w Σ . Dla każdego $i \in \{0, \dots, g\}$, definiujemy $S_i = J_{k-2i} - V(J_{k-2i-2})$. Skoro

$$\sum_{i=0}^g \mathbf{eg}(\tilde{S}_i, \Pi) = \mathbf{eg}\left(\bigcup_{i=0}^g \tilde{S}_i, \Pi\right) \leq \mathbf{eg}(G - e_0, \Pi) \leq g,$$

to dla pewnego $i \in \{0, \dots, g\}$, mamy $\mathbf{eg}(\tilde{S}_i, \Pi) = 0$, czyli zanurzenie grafu \tilde{S}_i indukowane przez Π jest planarne. Ustalmy takie i . Graf S_i jest subdywizją 3-spójnego grafu, więc na mocy twierdzenia 10.11, ma dokładnie jedno zanurzenie planarne, z dokładnością do równoważności. W zanurzeniu tym, dla każdego 6-cyklu C w S_i , cykl \tilde{C} w \tilde{S}_i odpowiada pewnej ścianie zanurzenia Π .

Niech C_0 i C_1 oznaczają cykle zewnętrzne indukowanych modeli krat J_{k-2i} i J_{k-2i-1} odpowiednio i niech B_0 będzie \tilde{C}_{k-2i-1} -mostem w G zawierającym \tilde{C}_{k-2i} . Wówczas $\tilde{C}_{k-2i-1} \cup B_0 \subseteq G - e_0$, więc w szczególności $\tilde{C}_1 \cup B_0$ da się zanurzyć w Σ .

Skoro rozpatrywany model topologiczny kraty J_k jest dobry, suma \tilde{J}_{k-2i} oraz wszystkich \tilde{J}_{k-2i} -mostów przecinających \tilde{J}_{k-2i-1} jest planarna. Stąd zanurzenie grafu $\tilde{C}_1 \cup B_0$ w Σ da się naturalnie rozszerzyć do zanurzenia Π' grafu G o genusie Eulera co najwyżej g .

Jeśli zanurzenie Π jest orientowalne, to Π' również jest orientowalne a więc jest zanurzeniem G w Σ . Załóżmy więc, że Σ jest powierzchnią nieorientowalną a Π jest zanurzeniem nieorientowalnym. Jeśli $\mathbf{eg}(G, \Pi') < \mathbf{eg}(G - e_0, \Pi)$, to Π' jest zanurzeniem w Σ , a jeśli $\mathbf{eg}(G, \Pi') = \mathbf{eg}(G - e_0, \Pi)$, to można wykazać, że Π' jest również zanurzeniem orientowalnym (jeśli w Π' istnieje cykl o nieparzystej liczbie negatywnych krawędzi, to można go „wypchnąć” poza cykl C_{k-2i} , co dowodzi, że Π również ma cykl o nieparzystej liczbie ujemnych krawędzi). \square

Twierdzenie 13.3. *Dla każdej powierzchni Σ istnieje dodatnia liczba całkowita m o następującej własności. Jeśli G jest takim grafem, że G nie da się zanurzyć w Σ ale dla każdej krawędzi $e \in E(G)$, graf $G - e$ da się zanurzyć w Σ , to G nie zawiera subdywizji kraty J_m .*

Dowód. Udowodnimy twierdzenie dla $m = (2g + 2)(2k + 1)$ gdzie $k = 2g + 3$. Załóżmy nie wprost, że G zawiera subdywizję kraty J_m . Na mocy lematu 13.1, G zawiera model topologiczny $(\{x_u\}_{u \in V(J_k)}, \{P_e\}_{e \in E(J_k)})$ kraty J_k który jest dobry w G . Niech $e_0 \in \bigcup_{e \in E(J_1)} E(P_e)$. Z założenia twierdzenia, Graf $G - e_0$ da się zanurzyć w Σ . Zatem z lematu 13.2, graf G również da się zanurzyć w Σ . \square

14. DOBRE QUASI-PORZĄDKI

Quasi-porządek to para (X, \preceq) gdzie X jest zbiorem a \preceq zwrotną i przechodnią relacją binarną na X . *Dobry quasi-porządek* to quasi-porządek o tej własności, że dla każdego nieskończonego ciągu x_0, x_1, \dots w X istnieją takie nieujemne liczby całkowite i i j , że $i < j$ oraz $x_i \preceq x_j$. *Antyłańcuch* w quasi-porządku to zbiór parami nieporównywalnych elementów. Ciąg x_0, x_1, \dots w X jest *ściśle malejący* w (X, \preceq) jeśli $x_{i+1} \preceq x_i$ i $x_i \not\preceq x_{i+1}$ dla każdej nieujemnej liczby całkowitej i .

Twierdzenie 14.1 (Robertsona-Seymoura). *Każdy zbiór skończonych grafów jest dobrze quasi-uporządkowany relacją bycia minorem.*

14.1. Szerokość gałęziowa. Niech G będzie grafem. Dla podzbioru A jego krawędzi, przez $\Gamma_G(A)$ oznaczamy zbiór wszystkich takich wierzchołków, które są incydentne z pewną krawędzią z A oraz z pewną krawędzią z $E(G) \setminus A$. *Funkcja spójności* γ_G grafu G jest zdefiniowana przez $\gamma_G(A) = |\Gamma_G(A)|$ dla $A \subseteq E(G)$. Funkcja ta jest *symetryczna*, to znaczy $\gamma_G(A) = \gamma_G(E(G) \setminus A)$ dla $A \subseteq E(G)$, oraz *submodularna*, to znaczy

$$\gamma_G(A) + \gamma_G(B) \geq \gamma_G(A \cap B) + \gamma_G(A \cup B)$$

dla dowolnych podzbiorów A i B zbioru $E(G)$. Dla rozłącznych podzbiorów A i B zbioru $E(G)$ definiujemy

$$\gamma_G(A, B) = \min\{\gamma_G(X) : A \subseteq X \subseteq E(G) \setminus B\}.$$

Oczywiście $\gamma_G(A, B) = \gamma_G(B, A)$ dla każdej pary rozłącznych podzbiorów A i B zbioru $E(G)$.

Dekompozycją gałęziową grafu G nazywamy parę $\mathcal{T} = (T, \tau)$, gdzie T jest drzewem którym każdy wierzchołek niebędący liściem ma stopień 3 a τ jest funkcją przypisującą krawędziom grafu G parami różne liście drzewa T . Dla poddrzewa T' drzewa T , mówimy, że T' *pokazuje* zbiór $\{e \in E(G) : \tau(e) \in V(T')\}$ w \mathcal{T} . Dla krawędzi $e \in E(T)$, jeśli składowe lasu $T - e$ to T_1 i T_2 i pokazują one zbiory E_1 i E_2 odpowiednio, to mówimy, że e *pokazuje* zbiory E_1 i E_2 w \mathcal{T} . Wówczas $\gamma_G(E_1) = \gamma_G(E_2)$; wartość tę nazywamy *szerokością* krawędzi e w \mathcal{T} i oznaczamy ją przez $\gamma_G(\mathcal{T}, e)$. *Szerokością* dekompozycji gałęziowej grafu G nazywamy największą z szerokości jego krawędzi, a *szerokością gałęziową* grafu G nazywamy minimalną szerokość jego dekompozycji gałęziowej.

Niech e_1 i e_2 będą krawędziami dekompozycji gałęziowej $\mathcal{T} = (T, \tau)$ grafu G i dla $i \in \{1, 2\}$, niech E_i będzie zbiorem pokazywanym przez składową lasu $T - e_i$ niezawierającą krawędzi e_{3-i} (jeśli $e_1 = e_2$, to wybierzmy różne E_1 i E_2). Niech P będzie najkrótszą ścieżką w T zawierającą e_1 i e_2 . Wówczas dla każdej krawędzi $e \in E(P)$ mamy $\gamma_G(E_1, E_2) \leq \gamma_G(\mathcal{T}, e)$. Jeśli dla którejś krawędzi $e \in E(P)$ zachodzi równość $\gamma_G(E_1, E_2) = \gamma_G(\mathcal{T}, e)$, to mówimy że krawędzie e_1 i e_2 są *połączone* w \mathcal{T} . Dekompozycja gałęziowa jest *połączona* jeśli każda para jej krawędzi jest połączona.

Mówimy, że zbiór X *dzieli* zbiór Y jeśli zbiory $Y \cap X$ i $Y \setminus X$ są oba niepuste. Dla dekompozycji gałęziowej \mathcal{T} grafu G i dla $A \subseteq E(G)$, przez $s_{\mathcal{T}}(A)$ oznaczamy liczbę zbiorów pokazywanych przez krawędzie grafu G które są dzielone przez A .

Lemat 14.2. *Niech \mathcal{T} będzie dekompozycją gałęziową grafu G , A dowolnym podzbiorem krawędzi grafu G , a W pewnym zbiorem pokazywanym przez pewną krawędź dekompozycji \mathcal{T} . Jeśli $s_{\mathcal{T}}(A \cup W) \geq s_{\mathcal{T}}(A)$, to A nie dzieli zbioru W .*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że A dzieli zbiór W . Zauważmy, że dla dowolnych dwóch zbiorów pokazywanych przez krawędzie dekompozycji gałęziowej albo są one rozłączne albo jeden z nich jest podzbiorem drugiego. Stąd, skoro A dzieli W , każdy zbiór pokazywany przez krawędź dekompozycji \mathcal{T} który jest dzielony przez $A \cup W$, jest też dzielony przez A . Skoro $s_{\mathcal{T}}(A \cup W) \geq s_{\mathcal{T}}(A)$, oznacza to, że A i $A \cup W$ dzielą dokładnie te same zbiory pokazywane przez krawędzie dekompozycji \mathcal{T} . To jednak jest sprzeczność, gdyż zbiór A dzieli W , a $A \cup W$ nie. \square

Twierdzenie 14.3. *Każdy graf o szerokości gałęziowej n ma połączoną dekompozycję gałęziową o szerokości n .*

Dowód. Niech G będzie grafem o szerokości gałęziowej n . Na potrzeby tego dowodu rozważamy tylko takie dekompozycje gałęziowe (T, τ) grafu G , że $E(G) \subseteq V(T)$ i $\tau(e) = e$ dla $e \in E(G)$. Każdą dekompozycję (T, τ) tej postaci utożsamiamy z drzewem T

Dla dekompozycji gałęziowej T grafu G , przez T_k oznaczamy las w T indukowany przez krawędzie o szerokości co najmniej k . Dla lasu F oznaczmy przez $c(F)$ liczbę jego

spójnych składowych. Każdej dekompozycji gałęziowej T grafu G przyporządkujemy ciąg $2n + 2$ liczb:

$$\sigma(T) = (|E(T_{n+1})|, -c(T_{n+1}), \dots, |E(T_0)|, -c(T_0)).$$

Jeśli dwie krawędzie lasu T_k pokazują te same pary zbiorów krawędzi w T , to leżą w jednej składowej, więc dla każdego G wartość $c(T_k)$ jest ograniczona przez wspólną stałą dla wszystkich dekompozycji gałęziowych T grafu G . Istnieje więc dekompozycja gałęziowa T , dla której ciąg $\sigma(T)$ jest najwcześniejszy leksykograficznie. Ustalmy taką dekompozycję gałęziową T . Wówczas $|E(T_{n+1})| = 0$, czyli T ma szerokość n . Pokażemy, że dekompozycja gałęziowa T połączona. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest i niech e_1 i e_2 będą dwoma niepołączonymi krawędziami dekompozycji T . Oczywiście $e_1 \neq e_2$. Dla $i \in \{1, 2\}$, niech E_i będzie zbiorem pokazywanym przez składową lasu $T - e_i$ niezawierającą e_{3-i} i niech x_i będzie końcem krawędzi e_i w składowej lasu $T - e_i$ zawierającej e_{3-i} . Niech P oznacza ścieżkę między x_1 a x_2 w T .

Niech A będzie takim podzbiorem krawędzi grafu G , że $E_1 \subseteq A \subseteq E(G) \setminus E_2$, $\gamma_G(A) = \gamma(E_1, E_2)$ i zbiór A dzieli najmniejszą możliwą liczbę zbiorów pokazywanych przez krawędzie dekompozycji T . Zdefiniujmy nowe drzewo \hat{T} w następujący sposób: dla $i \in \{1, 2\}$, niech T_1 będzie kopią spójnej składowej $T - e_{3-i}$ zawierającej e_i i niech \hat{T} będzie drzewem otrzymanym z T_1 i T_2 przez dodanie nowej krawędzi a między kopią x_2 w T_1 a kopią wierzchołka x_1 w T_2 .

Drzewo \hat{T} przekształcamy w dekompozycję gałęziową grafu G , utożsamiając każdą krawędź e grafu G z jego kopią w T_1 jeśli $e \in A$ albo z jego kopią w T_2 jeśli $e \notin A$.

Twierdzimy, że

(*) *jeśli e jest krawędzią T a \hat{e} jest jedną z jego kopii w \hat{T} , to $\gamma_G(\hat{e}) \leq \gamma_G(e)$, a równość może zachodzić tylko gdy $\hat{T}_{\gamma_G(A)+1}$ zawiera co najwyżej jedną kopię krawędzi e .*

Ze względu na symetrię, możemy w dowodzie własności (*) założyć, że \hat{e} leży w T_1 . Oznaczmy przez W zbiór pokazywany przez składową lasu $T - e$ niezawierającą wierzchołka x_2 . Wówczas $\gamma_G(e) = \gamma_G(W)$ i $\gamma_G(\hat{e}) = \gamma_G(A \cap W)$. Z submodularności funkcji γ_G dostajemy

$$\begin{aligned} \gamma_G(\hat{e}) + \gamma_G(A \cup W) &\leq \gamma_G(e) + \gamma_G(A) \\ &= \gamma_G(e) + \gamma_G(E_1, E_2) \leq \gamma_G(e) + \gamma_G(A \cup W). \end{aligned}$$

Zatem $\gamma_G(\hat{e}) \leq \gamma_G(e)$, a jeśli zachodzi równość, to $\gamma_G(A \cup W) = \gamma_G(A)$.

Od teraz zakładamy, że $\gamma_G(\hat{e}) = \gamma_G(e)$. To oznacza, że $\gamma_G(A \cup W) = \gamma_G(A) = \gamma_G(E_1, E_2)$, więc z definicji zbioru A , mamy $s_T(A \cup W) \geq s_T(A)$. Z lematu 14.2, zbiór A nie dzieli więc zbioru W . Zatem któryś ze zbiorów $W \cap A$ i $W \setminus A$ jest pusty. W szczególności, $\gamma_G(W \cap A) = 0$ lub $\gamma_G(W \setminus A) = 0$.

Przypomnijmy, że $\gamma_G(\hat{e}) = \gamma_G(W \cap A)$. Jeśli krawędź e ma drugą kopię e^* w \hat{T} , a więc w T_2 , to $\gamma_G(e^*)$ jeśli $e \in E(P)$ lub $\gamma_G(e^*) = \gamma_G(W \setminus A)$ jeśli $e \notin E(P)$. Zatem co najwyżej jedna z krawędzi \hat{e} i e^* leży w $T_{\gamma_G(A)+1}$. To kończy dowód własności (*).

Skoro $\gamma_G(a) = \gamma_G(A)$, to $a \notin E(\hat{T}_k)$ dla $k \geq \gamma_G(A) + 1$. Własność (*) implikuje więc, że dla każdego $k \geq \gamma_G(A) + 1$, każda krawędź w \hat{T}_k jest kopią krawędzi z T_k oraz każda krawędź w T_k ma co najwyżej jedną kopię w \hat{T}_k . Ponadto, jeśli dla jakiegoś $k \geq \gamma_G(A) + 1$ mamy $|E(T_k)| = |E(\hat{T}_k)|$, to każda krawędź lasu T_k ma kopię w \hat{T}_k i każda spójna składowa lasu \hat{T}_k jest kopią podgrafu lasu T_k . Oznacza to więc, że dla każdego $k \geq \gamma_G(A) + 1$ zachodzi $|E(T_k)| \geq |E(\hat{T}_k)|$ i jeśli $|E(T_k)| = |E(\hat{T}_k)|$, to $c(T_k) \leq c(\hat{T}_k)$. Skoro $\sigma(T) \leq \sigma(\hat{T})$ w porządku leksykograficznym, oznacza to, że dla każdego $k \geq \gamma_G(A) + 1$ mamy $|E(T_k)| = |E(\hat{T}_k)|$ i $c(T_k) = c(\hat{T}_k)$, czyli każda spójna składowa lasu T_k ma swoją kopię w \hat{T}_k . To jednak dla $k = \gamma_G(A) + 1$ oznacza sprzeczność: skoro e_1 i e_2 nie są połączone w T , las $T_{\gamma_G(A)+1}$ zawiera ścieżkę indukowaną przez $E(P) \cup \{e_1, e_2\}$, a ścieżka ta nie ma kopii w \hat{T}_k . Otrzymana sprzeczność dowodzi, że dekompozycja T w istocie jest połączona. \square

14.2. Lemat o drzewach. *Ukorzonym drzewem* nazywamy skończone skierowane drzewo w którym wszystkie wierzchołki z wyjątkiem jednego mają stopień wejściowy równy 1. *Ukorzonym lasem* nazywamy sumę co najwyżej przeliczalnie wielu wierzchołkowo rozłącznych ukorzonych drzew. Wierzchołki o stopniu wejściowym 0 w ukorzonym lesie nazywamy jego *korzeniami*, a wierzchołki o stopniu wejściowym 0 w ukorzonym lesie nazywamy jego *liśćmi* lasu. Krawędzie wychodzące z korzeni nazywamy *krawędziami korzeniowymi*, a krawędzie wchodzące do liści nazywamy *krawędziami liściowymi*. Dla zbioru S krawędzi w ukorzonym lesie F , przez $u_F(S)$ oznaczamy zbiór wszystkich krawędzi lasu F których początkami są końce pewnych krawędzi w S .

n-etykietowaniem krawędziowym grafu G nazywamy funkcję z krawędzi grafu G w zbiór $\{0, \dots, n\}$. Niech λ będzie *n-etykietowaniem ukorzonym lasu* F i niech e i f będą dwoma krawędziami lasu F . Piszemy $e \overset{\lambda}{\rightsquigarrow} f$ kiedy istnieje taka skierowana ścieżka P w F zaczynająca się w e i kończąca w f , że $\lambda(g) \geq \lambda(e) = \lambda(f)$ dla każdej krawędzi g na ścieżce P .

Lemat 14.4 (Lemat o drzewach). *Niech F będzie ukorzonym lasem z n-etykietowaniem krawędziowym λ . Ponadto, niech \preceq będzie takim quasi-porządkiem na $E(F)$ bez nieskończonego ciągu ściśle malejącego, że $f \preceq e$ jeśli $e \overset{\lambda}{\rightsquigarrow} f$. Jeśli \preceq nie jest dobrym quasi-porządkiem na $E(F)$, to istnieje taki nieskończony antylańcuch A , że \preceq jest dobrym quasi-porządkiem na $u_F(A)$.*

Dowód. Załóżmy, że tak nie jest i niech F , n i λ stanowią kontrprzykład z n najmniejszym możliwym. Oznaczmy przez N zbiór wszystkich krawędzi lasu F mających etykietę 0. Twierdzimy, że N nie jest dobrze uporządkowany. Załóżmy nie wprost, że jest. Wówczas aplikując lemat do lasu $F' = F - N$ i $(n-1)$ -etykietowania krawędziowego $\lambda'(e) = \lambda(e) - 1$, dostajemy taki nieskończony antylańcuch A , że $u_{F'}(A)$

jest dobrze quasi-uporządkowany przez \preceq . Wówczas jednak $u_F(A) \subseteq u_{F'}(A) \cup N$, co oznacza, że A spełnia lemat, czyli F , n i λ nie stanowią kontrprzykładu, sprzeczność.

Skoro zbiór N nie jest dobrze uporządkowany, to istnieje w nim nieskończony ciąg a_0, a_1, \dots który jest *niezależny*, to znaczy taki, że dla dowolnych dwóch nieujemnych liczb całkowitych i i j , jeśli $i < j$, to $a_i \not\preceq a_j$. Wybierzmy taki nieskończony ciąg niezależny a_0, a_1, \dots w N , że

- (i) dla każdej nieujemnej liczby całkowitej k , jeśli $a_k \overset{\lambda}{\rightsquigarrow} e$ dla pewnego $e \in N \setminus \{a_k\}$, to ciągu a_0, \dots, a_k, e nie da się rozszerzyć do nieskończonego ciągu niezależnego w N .

Zauważmy, że nie istnieją takie różne nieujemne liczby całkowite i i j , że $a_i \overset{\lambda}{\rightsquigarrow} e_j$; gdybyśmy mieli $i > j$, to ciąg a_0, a_1, \dots nie byłby niezależny, a gdybyśmy mieli $i < j$, to ciąg a_0, \dots, a_{i-1}, a_j dałoby się rozszerzyć do nieskończonego ciągu niezależnego.

Skoro F jest kontrprzykładem a zbiór $\{a_0, a_1, \dots\}$ zawiera nieskończony antyłańcuch, to zbiór $u_F(\{a_0, a_1, \dots\})$ nie jest dobrze quasi-uporządkowany. Oznaczmy przez R maksymalny las ukorzeniony o zbiorze korzeni $u_F(\{a_0, a_1, \dots\})$. Wówczas R również jest kontrprzykładem dla lematu, gdyż dla każdego zbioru krawędzi A w R mamy $u_R(A) = u_F(A)$. Powtarzając argument z początku dowodu, dostajemy, że w lesie R krawędzie o etykietach 0 nie są dobrze quasi-uporządkowane przez \preceq . Możemy więc w R znaleźć nieskończony ciąg krawędzi b_0, b_1, \dots o etykietach 0. Z konstrukcji R , dla każdej nieujemnej liczby całkowitej j istnieje unikalna nieujemna liczba całkowita $s(j)$, że $a_{s(j)} \overset{\lambda}{\rightsquigarrow} b_j$. Weźmy taką nieujemną liczbę całkowitą ℓ , dla której $s(\ell)$ jest najmniejsza. Wówczas dla dowolnych nieujemnych liczb i i j , jeśli $i < s(\ell)$ i $j \geq \ell$, to $b_j \preceq a_{s(j)}$ i $a_i \not\preceq a_{s(j)}$, więc $a_i \not\preceq b_j$. Stąd nieskończony ciąg $a_0, \dots, a_{s(\ell)-1}, b_\ell, b_{\ell+1}, \dots$ jest niezależny. To przeczy temu jak został wybrany element $a_{s(\ell)}$. To kończy dowód lematu. \square

Lasem binarnym nazywamy trójkę (F, ℓ, r) gdzie F jest ukorzenionym lasem w którym wszystkie korzenie mają stopień wyjścia 1 a ℓ i r są takimi funkcjami określonymi na nieliściowych krawędziach, że dla każdej nieliściowej krawędzi e w F , z końca krawędzi e wychodzą dokładnie dwie krawędzie, mianowicie $\ell(e)$ i $r(e)$.

Lemat 14.5. *W każdym nieskończonym ciągu x_0, x_1, \dots w dobrym quasi-porządku (X, \preceq) istnieje taki nieskończony podciąg y_0, y_1, \dots , że $y_0 \preceq y_1 \preceq \dots$*

Dowód. Zauważmy, że istnieje tylko skończenie wiele nieujemnych liczb całkowitych i dla których nie istnieje taka liczba całkowita j , że $i < j$ oraz $x_i \preceq x_j$; istotnie, w przeciwnym razie podciąg złożony z elementów x_i dla i jak wyżej, przeczyłby definicji dobrego quasi-porządku. Niech i_0 będzie taką nieujemną liczbą całkowitą, że dla każdej liczby całkowitej i , jeśli $i \geq i_0$, to istnieje taka liczba całkowita j , że $i < j$ i $x_i \preceq x_j$. Następnie, niech dla każdej dodatniej liczby całkowitej j , i_j będzie taką liczbą całkowitą że $i_{j-1} < i_j$ oraz $x_{i_{j-1}} \preceq x_{i_j}$. Wówczas ciąg y_0, y_1, \dots zadany przez $y_j = x_{i_j}$ spełnia tezę lematu. \square

Lemat 14.6 (Lemat o drzewach kubicznych). *Niech (F, ℓ, r) będzie nieskończonym lasem binarnym z n -etykietowaniem krawędziowym λ . Ponadto, niech \preceq będzie takim quasi-porządkiem na $E(F)$ bez nieskończonego ciągu ściśle malejącego, że $f \preceq e$ jeśli $e \xrightarrow{\lambda} f$. Jeśli krawędzie liściowe są dobrze quasi-uporządkowane przez \preceq a krawędzie korzeniowe nie są, to istnieje taki nieskończony ciąg e_0, e_1, \dots nieliściowych krawędzi w F , że*

- (i) zbiór $\{e_0, e_1, \dots\}$ jest antylańcuchem w \preceq ;
- (ii) $\ell(e_0) \preceq \ell(e_1) \preceq \dots$;
- (iii) $r(e_0) \preceq r(e_1) \preceq \dots$.

Dowód. Aplikując lemat 14.4 do F , λ i \preceq otrzymujemy taki nieskończony antylańcuch krawędzi A w \preceq , że $u_F(A)$ jest dobrym quasi-porządkiem. Skoro krawędzie liściowe lasu F są dobrze quasi-uporządkowane, tylko skończenie wiele krawędzi z A nie jest liściowych. Usuwając te krawędzie, możemy założyć, że żadna krawędź w A nie jest liściowa. Niech c_0, c_1, \dots będzie nieskończonym ciągiem w A . Aplikując dwukrotnie lemat 14.5, możemy najpierw otrzymać taki nieskończony podciąg d_0, d_1, \dots ciągu c_0, c_1, \dots , że $\ell(d_0) \preceq \ell(d_1) \preceq \dots$, a następnie taki nieskończony podciąg e_0, e_1, \dots ciągu d_0, d_1, \dots , że $r(e_0) \preceq r(e_1) \preceq \dots$. Wówczas ciąg e_0, e_1, \dots spełnia lemat. \square

14.3. Grafy o ograniczonej szerokości gałęziowej. *Ukorzonym grafem nazywamy parę (G, X) gdzie G jest grafem i $X \subseteq V(G)$. Ukorzonym graf (G_1, X_1) jest *minorem* ukorzonego grafu (G_2, X_2) , jeśli $|X_1| = |X_2|$ i istnieje taka funkcja ϕ przypisująca wierzchołkom grafu G_1 rozłączne spójne podgrafy grafu G_2 , że dla każdej krawędzi $uv \in E(G_1)$, grafy $\phi(u)$ i $\phi(v)$ są połączone krawędzią w G_2 i dla każdego $x \in X_1$, graf $\phi(y)$ zawiera (dokładnie jeden) wierzchołek z X_2 . Taką funkcję ϕ nazywamy (G_1, X_1) -modelem w (G_2, X_2) . Jeśli ϕ_1 jest (G_1, X_1) -modelem w (G_2, X_2) a ϕ_2 jest (G_2, X_2) -modelem w (G_3, X_3) , to możemy zdefiniować (G_1, X_1) -model $\phi_1 \circ \phi_2$ w (G_3, X_3) jako*

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(u) = G_3 \left[\bigcup_{v \in V(\phi_1(u))} V(\phi_2(v)) \right].$$

Stąd relacja bycia minorem na ukorzonych grafach jest quasi-porządkiem.

Lemat 14.7. *Niech G będzie grafem a E_1 i E_2 takimi zbiorami, że $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E(G)$. Dla $i \in \{1, 2\}$ niech $G_i = G[E_i]$. Jeśli $\gamma_G(E_1) = \gamma_G(E_1, E(G) \setminus E_2) = \gamma_G(E_2)$, to ukorzony graf $(G_1, \Gamma_G(E_1))$ jest minorem ukorzonego grafu $(G_2, \Gamma_G(E_2))$.*

Dowód. Niech $k = \gamma_G(E_1) = \gamma_G(E_2)$. Skoro $\gamma_G(E_1, E(G) \setminus E_2) = k$, to z twierdzenia Mengera G zawiera k rozłącznych $V(G[E_1])$ - $V(G[E(G) \setminus E_2])$ ścieżek P_1, \dots, P_k . Każda z tych ścieżek ma wszystkie krawędzie w $E_2 \setminus E_1$ i końce w zbiorach $\Gamma_G(E_1)$ i $\Gamma_G(E_2)$. To, że $(G_1, \Gamma_G(E_1))$ jest minorem $(G_2, \Gamma_G(E_2))$, jest więc świadczone przez funkcję ϕ gdzie $\phi(u) = G[\{u\}]$ dla $u \in V(G_1) \setminus \Gamma_G(E_1)$ a dla $y \in \Gamma_G(E_1)$, $\phi(y)$ jest tą ze ścieżek P_1, \dots, P_k , która zawiera y . \square

Twierdzenie 14.8. *Każdy zbiór grafów o ograniczonej szerokości gałęziowej jest dobrze quasi-uporządkowany relacją bycia minorem.*

Dowód. Niech \mathcal{G} będzie zbiorem grafów z których każdy ma szerokość co najwyżej n i założmy nie wprost, że nie jest on dobrze quasi-uporządkowany relacją bycia minorem. Z twierdzenia 14.3, dla każdego $G \in \mathcal{G}$ istnieje połączona dekompozycja gałęziowa (T_G, τ_G) o szerokości co najwyżej n . Możemy założyć, że każde drzewo T_G jest ukorzenione w liściu nienależącym do obrazu funkcji τ_G oraz że drzewa T_G są parami wierzchołkowo rozłączne. Dla $G \in \mathcal{G}$ i $e \in E(T_G)$, niech E^e będzie zbiorem pokazywanym przez składową $T_G - e$ niezawierającą korzenia drzewa T_G . Oznaczmy przez F sumę wszystkich drzew T_G dla $G \in \mathcal{G}$. Ponadto, niech $G^e = G[E^e]$, $X^e = \Gamma_G(E^e)$ oraz $\lambda(e) = \gamma_G(e)$.

Niech (F, ℓ, r) będzie ukorzenionym lasem binarnym, gdzie F jest sumą wszystkich drzew T_G dla $G \in \mathcal{G}$ a ℓ i r są wybrane dowolnie. Definiujemy quasi-porządek \preceq na krawędziach lasu F gdzie $e \preceq f$ jeśli ukorzeniony graf (G^f, X^f) jest minorem ukorzenionego grafu (G^e, X^e) .

Sprawdźmy, że spełnione są założenia lematu 14.6. Jeśli dla dwóch krawędzi e i f należących do T_G mamy $e \rightsquigarrow f$, to $\lambda(E^f) = \lambda(E^f, E(G) \setminus E^f) = \lambda(E^g)$, a zatem z lematu 14.7 ukorzeniony graf (G^f, X^f) jest minorem ukorzenionego grafu (G^e, X^e) , czyli $f \preceq e$. Quasi-porządek \preceq oczywiście nie ma nieskończonych ciągów ściśle malejących. Każdej krawędzi liściowej e w F , odpowiadający ukorzeniony graf (G^e, X^e) ma co najwyżej jedną krawędź i co najwyżej dwa wierzchołki, więc krawędzie liściowe są dobrze quasi-uporządkowane przez \preceq . Krawędziom korzeniowym lasu F odpowiadają ukorzenione grafy (G, \emptyset) dla $G \in \mathcal{G}$, więc z założenia nie wprost, krawędzie korzeniowe nie są dobrze quasi-uporządkowane przez \preceq . Istotnie więc, (F, ℓ, r) , λ i \preceq spełniają założenia lematu 14.6.

Weźmy więc taki nieskończony ciąg krawędzi e_0, e_1, \dots w F który spełnia warunki ((i)), ((ii)) i ((iii)) lematu 14.6.

Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej i , niech ϕ_i^L będzie $(G^{\ell(e_i)}, X^{\ell(e_i)})$ -modelem w $(G^{\ell(e_{i+1})}, X^{\ell(e_{i+1})})$ i niech ϕ_i^R będzie $(G^{r(e_i)}, X^{r(e_i)})$ -modelem w $(G^{r(e_{i+1})}, X^{r(e_{i+1})})$. Niech $\varphi_0^L: X^{\ell(e_0)} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ i $\varphi_0^R: X^{r(e_0)} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ będą różnowartościowymi etykietowaniami zbiorów $X^{\ell(e_0)}$ i $X^{r(e_0)}$. Dla każdej dodatniej liczby całkowitej i , zdefiniujemy etykietowania $\varphi_i^L: X^{\ell(e_i)} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ i $\varphi_i^R: X^{r(e_i)} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ w taki sposób, że jeśli $x \in X^{\ell(e_0)}$ i $V((\phi_0^L \circ \dots \circ \phi_{i-1}^L)(x)) \cap X^{\ell(e_i)} = \{y\}$, to $\varphi_0^L(x) = \varphi_i^L(y)$ oraz analogicznie, jeśli $x \in X^{r(e_0)}$ i $V((\phi_0^R \circ \dots \circ \phi_{i-1}^R)(x)) \cap X^{r(e_i)} = \{y\}$, to $\varphi_0^R(x) = \varphi_i^R(y)$.

Niech i i j będą takimi nieujemnymi liczbami całkowitymi, że $i < j$ oraz

$$\{(\varphi_i^L(x), \varphi_i^R(x)) : x \in X^{\ell(e_i)} \cap X^{r(e_i)}\} = \{(\varphi_j^L(x), \varphi_j^R(x)) : x \in X^{\ell(e_j)} \cap X^{r(e_j)}\}.$$

Niech $\phi^L = \phi_i^L \circ \dots \circ \phi_{j-1}^L$ oraz $\phi^R = \phi_i^R \circ \dots \circ \phi_{j-1}^R$. Wówczas (G^{e_i}, X^{e_i}) jest minorem (G^{e_j}, X^{e_j}) , co jest świadczone przez następujący (G^{e_i}, X^{e_i}) -model ϕ :

$$\phi(u) = \begin{cases} \phi^L(u) & \text{jeśli } u \in V(G^{\ell(e_i)}) \setminus X^{r(e_i)}, \\ \phi^L(u) \cup \phi^R(u) & \text{jeśli } u \in X^{\ell(e_i)} \cap X^{r(e_i)}, \\ \phi^R(u) & \text{jeśli } u \in V(G^{\ell(e_i)}) \setminus X^{\ell(e_i)}. \end{cases}$$

To oznacza, że $e_i \preceq e_j$, co przeczy temu, że zbiór $\{e_0, e_1, \dots\}$ jest antyłańcuchem w \preceq . \square

Twierdzenie 14.9 (Uogólnione Twierdzenie Kuratowskiego). *Dla każdej powierzchni Σ istnieje taki skończony zbiór grafów $\{G_1, \dots, G_n\}$, że każdy graf da się zanurzyć w Σ wtedy i tylko wtedy, gdy żaden z grafów G_1, \dots, G_n nie jest minorem tego grafu.*

Dowód. Rozważmy klasę wszystkich grafów G o tej własności, że grafu G nie da się zanurzyć w Σ ale każdy właściwy minor grafu G da się zanurzyć w Σ . Twierdzimy, że klasa ta zawiera tylko skończenie wiele parami nieizomorficznych grafów. Załóżmy nie wprost, że klasa ta zawiera nieskończony ciąg (G_0, G_1, \dots) parami nieizomorficznych grafów. Z twierdzenia 13.3 istnieje dodatnia liczba całkowita m , że żaden z grafów G_i nie zawiera kraty J_m jako minoru. Zatem z twierdzenia o kracie grafy G_i mają ograniczoną szerokość drzewiastą. Wobec tego istnieje taka liczba n , że każdy z grafów G_i ma szerokość gałęziową co najwyżej n . Z twierdzenia 14.8 znajdziemy takie i i j , że $i \neq j$ oraz $G_i \preceq G_j$, co stoi w sprzeczności z tym, że grafy G_i i G_j są nieizomorficzne i każdy właściwy minor G_j da się zanurzyć w Σ . \square