Strukturalna teoria grafów

Piotr Micek i Michał Seweryn

Zestaw 2
Semestr letni 2019/2020
Kraków, 20 maja 2020

Zadania domowe

Maksymalna liczba punktów do zdobycia za ten zestaw wynosi 10.

Termin wysyłania rozwiązań mija 31 maja o godzinie 23:59.

Zadanie 1 (3 punkty)**.** *Pasmem* (ang. *bandwidth*) grafu G nazywamy najmniejszą liczbę naturalną k dla której da się znaleźć takie uporządkowanie $v_1, \ldots, v_n$ wierzchołków grafu G, że dla każdej krawędzi v_iv_j grafu G mamy $|i-j| \leqslant k$. Liczbę tę oznaczamy przez $\mathrm{bandwidth}(G)$. Wykazać, że dla każdego grafu G mamy $\mathrm{pw}(G) \leqslant \mathrm{bandwidth}(G)$, ale nie istnieje taka funkcja f, że dla każdego grafu G zachodzi $\mathrm{bandwidth}(G) \leqslant f(\mathrm{pw}(G))$.

Zadanie 2 (3 punkty)**.** Wykaż, że dla każdego $k \geqslant 1$ i każdego 2-spójnego grafu G,

$$\text{jeśli } G \text{ nie zawiera cyklu długości większej niż } k, \text{ to } \mathrm{pw}(G) = O(k^2).$$

Zadanie 3 (3 punkty)**.** Wykazać, że jeśli G jest grafem bez K_t-minoru, to istnieje taki podzbiór X więcej niż połowy wierzchołków grafu G, że $\chi(G[X]) \leqslant t$.

Zadanie 4 (3 punkty)**.** *Liczbą jeżynową* (ang. *bramble number*) $\mathrm{bn}(G)$ grafu G nazywamy minimalny rząd jeżyny w grafie G. Dla dodatniej liczby całkowitej k, mówimy że zbiór wierzchołków S w grafie G jest *k-połączony* jeśli dla każdego podzbioru $X \subseteq V(G)$ o mocy mniejszej niż k, pewna składowa grafu $G - X$ zawiera więcej niż połowę wierzchołków zbioru S. Największą liczbę k dla której w grafie G istnieje zbiór k-połączony oznaczamy przez $\mathrm{link}(G)$.

Wykazać, że dla każdego grafu G zachodzi

$$\mathrm{link}(G) \leqslant \mathrm{bn}(G) \leqslant 2\,\mathrm{link}(G).$$