Strukturalna teoria grafów

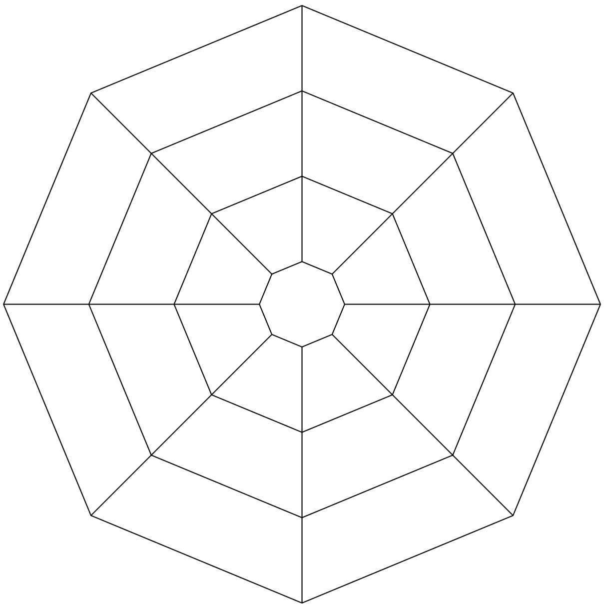
Piotr Micek i Michał Seweryn

Zadania domowe

Maksymalna liczba punktów do zdobycia za ten zestaw wynosi 10.

Termin wysyłania rozwiązań mija 14 czerwca o godzinie 23:59.

Zadanie 1 (4 punkty)**.** *Cylindrem* $m \times n$ nazywamy graf o mn wierzchołkach postaci $C_1 \cup \ldots \cup C_n \cup P_1 \cup \ldots \cup P_m$, gdzie $C_1, C_2, \ldots, C_n$, są wierzchołkowo rozłącznymi cyklami długości m każdy, a $P_1, P_2, \ldots, P_m$ są rozłącznymi wierzchołkowo ścieżkami, każda o n wierzchołkach i każda przecinająca cykle $C_1, C_2, \ldots, C_n$ w tej kolejności, patrz rysunek 1.



Rysunek 1: Cylinder 8×4.

Dwie jeżyny $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ grafu G są *rozróżnialne*, jeżeli istnieje taki zbiór $X \subseteq V(G)$, że $|X| < \min\{\mathrm{ord}(\mathcal{B}_1), \mathrm{ord}(\mathcal{B}_2)\}$ oraz istnieją elementy $B_1 \in \mathcal{B}_1$ oraz $B_2 \in \mathcal{B}_2$ leżące w różnych składowych grafu $G - X$.

Niech G będzie cylindrem $(10n + 2) \times n$. Dla każdego $Y \subseteq V(G)$ takiego, że $|Y| \leqslant 2n$ niech $f(Y)$ będzie składową grafu $G - Y$ taką, że

* Jeśli dokładnie jedna składowa grafu $G - Y$zawiera w całości którąś ze ścieżek P_i, to $f(Y)$ jest tą składową;
* W przeciwnym wypadku łatwo widać, że $|Y| = 2n$ i Y przecina każdy cykl cylindra G w dokładnie dwu wierzchołkach. Jeśli istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że któryś z komponentów $G - Y$ zawiera co najmniej $5n + 1$ wierzchołków cyklu C_i, to niech i będzie najmniejsze możliwe i wtedy $f(Y)$ jest komponentem $G - Y$ zawierającym co najmniej $5n + 1$ wierzchołków C_i.
* W przeciwnym wypadku, niech $f(Y)$ będzie dowolnie wybranym komponentem $G - Y$.

Niech $\mathcal{B} = \{f(Y) \mid Y \subseteq V(G)$, gdzie $|Y| \leqslant 2n\}$. Wykaż, że $\mathcal{B}$ jest jeżyną w G rzędu co najmniej $2n+1$. Rozważając opisaną konstrukcję, wywnioskuj, że G ma 2^{3^n} parami rozróżnialnych jeżyn.

Zadanie 2 (4 punkty)**.** Wykazać, że dla każdego grafu planarnego H istnieje taka funkcja f, że dla dowolnego grafu G i dla dowolnej liczby całkowitej $k \geqslant 1$

1. G ma k rozłącznych podgrafów spośród których każdy ma minor izomorficzny z H lub
2. istnieje zbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| \leqslant f(k)$ oraz $G - X$ nie ma minoru izomorficznego z H.

Zadanie 3 (4 punkty)**.** Niech G będzie grafem, a $\mathcal{T}$ splątaniem w G. Model $(V_h)_{h \in V(H)}$ grafu H w G jest *kontrolowany* przez $\mathcal{T}$, jeśli każdemu wierzchołkowi $h \in V(H)$ możemy przypisać reprezentanta $v_h \in V_h$ tak aby zbiór $\{v_h \mid h \in V(H)\}$ był $\mathcal{T}$-niezależny.

Wykaż, że istnieje funkcja f taka, że dla dowolnego grafu G i splątania $\mathcal{T}$ rzędu $f(n)$ w G, istnieje model $\boxplus_n$ kontrolowany przez $\mathcal{T}$ w G.

Wskazówka: Można przemyśleć dowód twierdzenia o kracie i spróbować znaleźć podkratę taką, że każdy jej worek zawiera wierzchołek zbioru $\mathcal{T}$-niezależnego korzystając z zadania 4 z trzecich ćwiczeń.