Zadania domowe

Maksymalna liczba punktów do zdobycia za ten zestaw wynosi 10.

Termin wysyłania rozwiązań mija 25 czerwca o godzinie 23:59.

Zadanie 1 (3 punkty)**.** A-ścieżka jest *nieparzysta* jeżeli ma nieparzystą liczbę krawędzi. Wykazać, że nieparzyste A-ścieżki mają własność Erdősa-Pósy, to jest istnieje taka funkcja $f(k)$, że dla każdego grafu G, zbioru $A \subseteq V(G)$ i nieujemnej liczby całkowitej k

(i) graf G ma k rozłącznych nieparzystych A-ścieżek lub
(ii) istnieje taki zbiór X o mocy co najwyżej $f(k)$, że $G - X$ nie zawiera żadnych nieparzystych A-ścieżek.

Zadanie 2 (3 punkty)**.** Wykazać, że dla każdej liczby całkowitej ℓ, A-ścieżki o długości co najmniej ℓ mają własność Erdősa-Pósy, to jest istnieje taka funkcja $f_\ell(k)$, że dla każdego grafu G, zbioru $A \subseteq V(G)$ i nieujemnej liczby całkowitej k

(i) graf G ma k rozłącznych A-ścieżek o długości co najmniej ℓ lub
(ii) istnieje taki zbiór X o mocy co najwyżej $f_\ell(k)$, że $G - X$ nie zawiera żadnych A-ścieżek o długości co najmniej ℓ.

Zadanie 3 (3 punkty)**.** Wykazać, że parzyste cykle mają własność Erdősa-Pósy, to jest istnieje taka funkcja $f(k)$, że dla każdego grafu G i nieujemnej liczby całkowitej k

(i) graf G ma k rozłącznych parzystych cykli lub
(ii) istnieje taki zbiór X o mocy co najwyżej $f(k)$, że $G - X$ nie zawiera żadnych parzystych cykli.

Wskazówka. Skorzystać z twierdzenia o kracie.

Zadanie 4 (3 punkty)**.** Niech G będzie grafem, niech $S, T \subseteq V(G)$ i niech $\{S_1, \ldots, S_k\}$ będzie podziałem zbioru S na podzbiory które są spójne w G. Załóżmy ponadto, że istnieją takie rozłączne ścieżki P_1, …, P_k, że P_i jest S_i–T ścieżką (ale być może zawiera więcej niż jeden wierzchołek z S). Niech R będzie zbiorem zawierającym dokładnie jeden wierzchołek z każdego S_i. Wykazać, że istnieje $\lfloor k/2 \rfloor$ rozłącznych R–T ścieżek.