

## Zadania domowe

Maksymalna liczba punktów do zdobycia za ten zestaw wynosi 10.

Termin wysyłania rozwiązań mija 18 marca o godzinie 23:59.

**Zadanie 1** (3 punkty). Wykazać, że jeśli  $G$  jest grafem o minimalnym stopniu  $\delta$ , to  $\text{tw}(G) \geq \delta$ .

**Zadanie 2** (3 punkty). Niech  $\mathcal{C}$  będzie klasą grafów,  $k$  nieujemną liczbą całkowitą, a  $\mathcal{C}'$  klasą wszystkich grafów  $G$  dla których istnieje taki zbiór  $F \subseteq E(G)$ , że  $|F| \leq k$  oraz  $G - F \in \mathcal{C}$ . Dla jakich wartości  $k$  klasa  $\mathcal{C}'$  jest zamknięta na branie minorów jeśli klasa  $\mathcal{C}$  jest

- (a) klasą wszystkich lasów?
- (b) klasą wszystkich grafów planarnych?

**Zadanie 3** (3 punkty). *Schronem* w grafie  $G$  nazywamy taki poset  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  złożony z podgrafów grafu  $G$  i uporządkowany relacją bycia podgrafem, że

- (i) każdy graf w  $\mathcal{S}$  jest niepusty i spójny,
- (ii) dla każdego  $H \in \mathcal{S}$  który nie jest minimalny w posecie  $(\mathcal{S}, \subseteq)$  i dla każdego  $x \in V(H)$  istnieje taki  $H' \in \mathcal{S}$  pokryty przez  $H$ , że  $x \notin V(H')$ .

(Przypomnijmy, że element  $a$  jest *pokryty* przez element  $b$  w posecie, jeśli  $a < b$ , ale nie istnieje taki element  $c$ , że  $a < c < b$ .)

*Grubość* schronu to minimalna wielkość łańcucha maksymalnego w schronie.

Wykazać, że głębokość drzewiasta grafu jest równa największej grubości schronu w tym grafie.

*Wskazówka:* Skonstruować taką grę dwuosobową na grafie  $G$ , że schrony odpowiadają strategiom jednego gracza, a lasy eliminacji strategiom drugiego gracza.

**Zadanie 4** (3 punkty). Niech  $A$  będzie zbiorem wierzchołków w grafie  $G$ . Dla każdego podzbioru  $X$  zbioru  $V(G)$ , niech  $\kappa(X)$  oznacza największą liczbę parami rozłącznych ścieżek z  $X$  do  $A$  w grafie  $G$ . Wykazać, że jeśli  $X$  i  $Y$  są takimi podzbiórmi zbioru  $V(G)$ , że  $\kappa(X) < \kappa(Y)$ , to istnieje taki wierzchołek  $y \in Y$ , że  $\kappa(X \cup \{y\}) > \kappa(X)$ .