

Minory, dobre quasi-porządk i szerokość drzewiasta.

Modelem topologicznym grafu H w grafie G jest funkcja ϕ która przypisuje każdemu wierzchołkowi $v \in V(H)$ wierzchołek $\phi(v)$ grafu G , a każdej krawędzi $e \in E(H)$ ścieżkę $\phi(e)$ w grafie G w taki sposób, że

1. $\phi(u) \neq \phi(v)$ dla różnych wierzchołków $u, v \in V(H)$;
2. dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$, ścieżka $\phi(uv)$ ma końce w $\phi(u)$ i $\phi(v)$;
3. ścieżki $\phi(e)$ i $\phi(e')$ są rozłączne poza końcami dla dowolnych dwu różnych krawędzi $e, e' \in E(H)$.

Piszemy wtedy $H \preceq_{\text{top}} G$.

Zadanie 1.

- (i) Wykazać, że jeśli $H \preceq_{\text{top}} G$, to $H \preceq G$.
- (ii) Wykazać, że implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa.
- (iii) Wykazać, że jeżeli każdy wierzchołek grafu H ma stopień co najwyżej 3 oraz $H \preceq G$, to $H \preceq_{\text{top}} G$.

Zadanie 2. Pokazać, że graf H jest minorem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy można otrzymać z G graf izomorficzny do H , wykonując ciąg operacji:

- * usunięcie wierzchołka,
- * usunięcie krawędzi,
- * *kontrakcję* krawędzi, czyli ściągnięcie krawędzi łączącej dwa wierzchołki u i v do jednego wierzchołka, którego sąsiadami są te wierzchołki, które sąsiadują z u lub v .

Zadanie 3. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- (i) Każda zamknięta na branie minorów klasa grafów \mathcal{G} jest określona przez pewien skończony zbiór $\{H_1, \dots, H_k\}$ zabronionych minorów, to znaczy taki zbiór, że \mathcal{G} składa się dokładnie z takich grafów G , że żaden graf H_i nie jest minorem G .
- (ii) W każdym nieskończonym zbiorze grafów można znaleźć takie dwa, że jeden jest minorem drugiego.
- (iii) Istnieje przeliczalnie wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów.
- (iv) Dla każdej zamkniętej na branie minorów klasy grafów problem przynależności do klasy jest rozstrzygalny.

Zadanie 4. Wykazać, że jeśli \mathcal{C} jest klasą grafów, którą można scharakteryzować skończoną listą zabronionych minorów, to można ją scharakteryzować skończoną listą zabronionych minorów topologicznych.

Zadanie 5. Ile wynosi $\text{tw}(K_n)$?

Zadanie 6. Wykazać, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\text{td}(G) \geq \text{pw}(G) + 1 \geq \text{tw}(G) + 1$.

Zadanie 7. Wykazać, że ścieżki mogą mieć dowolnie dużą głębokość drzewiastą. Ile wynosi głębokość drzewiasta ścieżki na k wierzchołkach?

Zadanie 8. Wykazać, że drzewa mogą mieć dowolnie dużą szerokość ścieżkową.

Zadanie 9. Wykazać, że jeśli G jest grafem bez cyklu długości co najmniej k , to $\text{tw}(G) \leq k$.

Quasi-porzadkiem nazywamy relację binarną \leq która jest zwrotna oraz przechodnia. Jeżeli dodatkowo dla każdego nieskończonego ciągu x_0, x_1, \dots w X istnieje taka para indeksów i oraz j , że $i < j$ oraz $x_i \leq x_j$, to mówimy, że \leq jest *dobrym quasi-porzadkiem*.

Zadanie 10. Wykazać, że quasi-porzadek \leq na X jest dobrym quasi-porzadkiem wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje nieskończony antyłańcuch w X ani taki nieskończony ciąg x_0, x_1, \dots w X , że dla wszystkich i zachodzi $x_{i+1} \leq x_i$ oraz $x_i \not\leq x_{i+1}$.

Zadanie 11. Wskazać nieskończoną rodzinę drzew, o tej własności, że żadne drzewo z tej rodziny nie jest izomorficzne do podgrafu żadnego innego drzewa z tej rodziny. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich drzew uporządkowana relacją bycia izomorficznym do podgrafu nie jest dobrym quasi-porzadkiem.

Zadanie 12. Wskazać nieskończoną rodzinę grafów o tej własności, że dla dowolnych dwóch grafów w tej rodzinie żaden z nich nie jest minorem topologicznym drugiego. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich grafów uporządkowana relacją \preceq_{top} nie jest dobrym quasi-porzadkiem.

Niech \leq będzie quasi-porzadkiem na zbiorze X . Dla dowolnych dwóch skończonych podzbiorów $A, B \subseteq X$, piszemy $A \leq B$, jeżeli istnieje taka iniekcja $f : A \rightarrow B$, że $a \leq f(a)$ dla wszystkich $a \in A$. W ten sposób otrzymujemy rozszerzenie quasi-porzadku na zbiorze X do quasi-porzadku na zbiorze $[X]^{<\omega}$ wszystkich skończonych podzbiorów X .

Zadanie 13. Wykazać, że jeżeli \leq jest dobrym quasi-porzadkiem na X , to zdefiniowane powyżej rozszerzenie na $[X]^{<\omega}$ też jest dobrym quasi-porzadkiem.

Wskazówka: Założyć nie wprost, że w $[X]^{<\omega}$ istnieje ciąg A_0, A_1, \dots , który nie spełnia warunku z definicji. Wybrać taki ciąg, dla którego ciąg rozmiarów $|A_0|, |A_1|, \dots$ jest najwcześniejszy leksykograficznie. Przeanalizować ciągi a_0, a_1, \dots oraz $A_0 \setminus \{a_0\}, A_1 \setminus \{a_1\}, \dots$, gdzie $a_n \in A_n$ są dowolne.

Mówimy, że ukorzenione drzewo T jest poddrzewem ukorzenionego drzewa T' , jeżeli istnieje funkcja $\phi : V(T) \rightarrow V(T')$ która zachowuje relację bycia przodkiem.

Zadanie 14. Wykazać, że ukorzenione drzewa są dobrze quasi-uporządkowane relacją bycia poddrzewem