Szerokość drzewiasta i aspekty algorytmiczne.

Podzbiór wierzchołków S w grafie G jest *zbiorem niezależnym* jeśli żadne dwa wierzchołki w S nie są połączone krawędzią. Rozmiar największego zbioru niezależnego w G oznaczamy przez $\alpha(G)$. Podzbiór wierzchołków D w grafie G jest *zbiorem dominującym* jeśli każdy wierzchołek spoza D ma sąsiada w D. Rozmiar najmniejszego zbioru dominującego w G oznaczamy przez $\beta(G)$.

Zadanie 1. Niech G będzie grafem, $k = \mathrm{tw}(G)$, oraz $X \subseteq V(G)$. Pokaż, że istnieje $S \subseteq V(G)$ rozmiaru $|S| \leqslant k+1$ taki, że dla każdej składowej spójnej C grafu $G \setminus S$ mamy

$$|V(C) \cap X| \leqslant \frac{|X|}{2}.$$

Wywnioskuj, że G zawiera separację (A, B) rzędu co najwyżej $k+1$ taką, że $\max\{|X \setminus V(A)|, |X \setminus V(B)|\} \leqslant \frac{2|X|}{3}$.

Zadanie 2. Niech H będzie spójnym grafem. Pokaż, że dla każdego grafu G oraz dodatniej liczby t albo istnieje $t+1$ wierzchołkowo rozłącznych podgrafów w G izomorficznych do H albo zbiór $X \subseteq V(G)$ rozmiaru $|X| \leqslant t(\mathrm{tw}(G)+1)$ taki, że $G \setminus X$ nie ma podgrafu izomorficznego do H.

Zadanie 3. Niech dany będzie graf G wraz z dekompozycją drzewiastą $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ o szerokości k. Podaj algorytm wyznaczający rozmiar maksymalnego zbioru niezależnego w G w czasie $\mathcal{O}(c^k|V(G)|^d)$ dla pewnych stałych c, d.

Zadanie 4. Niech dany będzie graf G wraz z dekompozycją drzewiastą $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ o szerokości k. Podaj algorytm wyznaczający rozmiar minimalnego zbioru dominującego w G w czasie $\mathcal{O}(c^k|V(G)|^d)$ dla pewnych stałych c, d.

Zadanie 5. Niech dany będzie graf G oraz liczba dodatnia k. Podaj algorytm działający w czasie $\mathcal{O}(c^k|V(G)|^d)$ dla pewnych stałch c, d który albo wyznacza poprawną dekompozycję drzewiastą grafu G o szerokości co najwyżej $4k+3$ albo poprawinie stwierdza, że szerokość drzewiasta G jest ściśle większa od k.

Wskazówka. Spróbuj jako podzadanie w algorytmie rozważać parę (H, S) gdzie $H \subseteq G$, $S \subseteq V(H)$, $|S| \leqslant 3k+3$ a naszym celem jest znalezienie dekompozycji drzewiastej H gdzie dodatkowo S znajduje się w jednym worku.

Zadanie 6. Niech dany będzie graf G oraz liczba dodatnia k. Podaj algorytm działający w czasie $\mathcal{O}(c^{k \log k}|V(G)|^d)$ dla pewnych stałych c, d który znajduje w grafie G ścieżkę długości co najmniej k bądź poprawnie zgłasza że G takiej ścieżki nie posiada.

Zadanie 7. Niech G będzie grafem planarnym o promienu r. Pokaż, że $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathcal{O}(r)$.

Zadanie 8. Pokaż, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje algorytm który dostając na wejściu graf planarny G zwraca zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $(1-\varepsilon)\alpha(G)$ w czasie co najwyżej $\mathcal{O}(c^{1/\varepsilon}|V(G)|^d)$ dla pewnych stałych c, d.

Zadanie 9. Pokaż, że dla każdego grafu planarnego G na n wierzchołkach mamy nierówność $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Wskazówka. Pokaż, że każdy spójny graf planarny G na n wierzchołkach zawiera separację (A, B), taką że $\max\{|V(G) \setminus V(A)|, |V(G) \setminus V(B)|\} \leqslant \frac{2n}{3}$ oraz $\mathrm{ord}(A, B) \leqslant \mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Zadanie 10. Pokaż, że istnieje stała $c > 0$ taka, że każdy graf planarny G spełniający $\mathrm{tw}(G) > ck$ spełnia $\boxplus_k \preccurlyeq G$.

Wskazówka. Przypuśćmy, że na ścianie zewnętrznej grafu G mamy $4k$ wierzchołków zgrupowanych jako N, E, S, W gdzie $|N| = |E| = |S| = |W| = k$ i występują one w dokładnie tej kolejności (cyklicznie) na ścianie zewnętrznej. Co się stanie gdy mamy k wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z N do S oraz k wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z E do W? Co się stanie gdy nie ma tylu ścieżek w którąś stronę?

Użyj tej obserwacji do zbudowania algorytmu który dostając graf planarny nie zawierający $\boxplus_k$ jako minora zwraca jego dekompozycję drzewiastą szerokości $\mathcal{O}(k)$.

Zadanie 11. Niech G będzie grafem planarnym, a k liczbą dodatnią. Pokaż, że w czasie $\mathcal{O}(c^{\sqrt{k}}|V(G)|^d)$ dla pewnych stałych c, d da się wyznaczyć

1. czy G posiada podzbiór niezależny rozmiaru co najmniej k;
2. czy G posiada podzbiór dominujący rozmiaru co najwyżej k;
3. czy G zawiera co najmniej k wierzchołkowo rozłącznych cykli.