Parametry związane z szerokością drzewiastą i zadania zaległe.

Zadania zaległe

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli G jest grafem bez cyklu długości co najmniej k, to $\text{tw}(G) \leqslant k$.

Quasi-porządkiem nazywamy relację binarną $\leqslant$ która jest zwrotna oraz przechodnia. Jeżeli dodatkowo dla każdego nieskończonego ciągu $x_0, x_1, \ldots$ w X istnieje taka para indeksów i oraz j, że $i < j$ oraz $x_i \leqslant x_j$, to mówimy, że $\leqslant$ jest *dobrym quasi-porządkiem.*

Zadanie 2. Wykazać, że quasi-porządek $\leqslant$ na X jest dobrym quasi-porządkiem wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje nieskończony antyłańcuch w X ani taki nieskończony ciąg $x_0, x_1, \ldots$ w X, że dla wszystkich i zachodzi $x_{i+1} \leqslant x_i$ oraz $x_i \nleqslant x_{i+1}$.

Zadanie 3. Wskazać nieskończoną rodzinę drzew, o tej własności, że żadne drzewo z tej rodziny nie jest izomorficzne do podgrafu żadnego innego drzewa z tej rodziny. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich drzew uporządkowana relacją bycia izomorficznym do podgrafu nie jest dobrym quasi-porządkiem.

Zadanie 4. Wskazać nieskończoną rodzinę grafów o tej własności, że dla dowolnych dwóch grafów w tej rodzinie żaden z nich nie jest minorem topologicznym drugiego. Wywnioskować z tego, że klasa wszystkich grafów uporządkowana relacją $\preccurlyeq_{\text{top}}$ nie jest dobrym quasi-porządkiem.

Niech $\leqslant$ będzie quasi-porządkiem na zbiorze X. Dla dowolnych dwóch skończonych podzbiorów $A, B \subseteq X$, piszemy $A \leqslant B$, jeżeli istnieje taka iniekcja $f : A \to B$, że $a \leqslant f(a)$ dla wszystkich $a \in A$. W ten sposób otrzymujemy rozszerzenie quasi-porządku na zbiorze X do quasi-porządku na zbiorze $[X]^{<\omega}$ wszystkich skończonych podzbiorów X.

Zadanie 5. Wykazać, że jeżeli $\leqslant$ jest dobrym quasi-porządkiem na X, to zdefiniowane powyżej rozszerzenie na $[X]^{<\omega}$ też jest dobrym quasi-porządkiem.

Wskazówka: Założyć nie wprost, że w $[X]^{<\omega}$ istnieje ciąg $A_0, A_1, \ldots$, który nie spełnia warunku z definicji. Wybrać taki ciąg, dla którego ciąg rozmiarów $|A_0|, |A_1|, \ldots$ jest najwcześniejszy leksykograficznie. Przeanalizować ciągi $a_0, a_1, \ldots$ oraz $A_0 \setminus \{a_0\}, A_1 \setminus \{a_1\}, \ldots$, gdzie $a_n \in A_n$ są dowolne.

Mowimy, że ukorzenione drzewo T jest poddrzewem ukorzenionego drzewa T', jeżeli istnieje funkcja $\phi \colon V(T) \to V(T')$ która zachowuje relację bycia przodkiem.

Zadanie 6. Wykazać, że ukorzenione drzewa są dobrze quasi-uporządkowane relacją bycia poddrzewem

Zadanie 7. Niech G będzie grafem planarnym o promieniu r. Pokaż, że $\operatorname{tw}(G) \leqslant \mathcal{O}(r)$.

Zadanie 8. Pokaż, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje algorytm który dostając na wejściu graf planarny G zwraca zbiór niezależny rozmiaru co najmniej $(1-\varepsilon)\alpha(G)$ w czasie co najwyżej $\mathcal{O}(c^{1/\varepsilon}|V(G)|^d)$ dla pewnych stałych c, d.

Zadanie 9. Pokaż, że dla każdego grafu planarnego G na n wierzchołkach mamy nierówność $\operatorname{tw}(G) \leqslant \mathcal{O}(\sqrt{n})$.
Wskazówka. Pokaż, że każdy spójny graf planarny G na n wierzchołkach zawiera separację (A, B), taką że $\max\{|V(G) \setminus V(A)|, |V(G) \setminus V(B)|\} \leqslant \frac{2n}{3}$ oraz $\operatorname{ord}(A, B) \leqslant \mathcal{O}(\sqrt{n})$.

Zadanie 10. Pokaż, że istnieje stała $c > 0$ taka, że każdy graf planarny G spełniający $\operatorname{tw}(G) > ck$ spełnia $\boxplus_k \preccurlyeq G$.
Wskazówka. Przypuśćmy, że na ścianie zewnętrznej grafu G mamy $4k$ wierzchołków zgrupowanych jako N, E, S, W gdzie $|N| = |E| = |S| = |W| = k$ i występują one w dokładnie tej kolejności (cyklicznie) na ścianie zewnętrznej. Co się stanie gdy mamy k wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z N do S oraz k wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z E do W? Co się stanie gdy nie ma tylu ścieżek w którąś stronę?

Użyj tej obserwacji do zbudowania algorytmu który dostając graf planarny nie zawierający $\boxplus_k$ jako minora zwraca jego dekompozycję drzewiastą szerokości $\mathcal{O}(k)$.

Zadanie 11. Niech G będzie grafem planarnym, a k liczbą dodatnią. Pokaż, że w czasie $\mathcal{O}(c^{\sqrt{k}}|V(G)|^d)$ dla pewnych stałych c, d da się wyznaczyć

1. czy G posiada podzbiór niezależny rozmiaru co najmniej k;
2. czy G posiada podzbiór dominujący rozmiaru co najwyżej k;
3. czy G zawiera co najmniej k wierzchołkowo rozłącznych cykli.

Zadanie 12. Wskazać jeżynę rzędu $n+1$ w kracie $\boxplus_n$. Wywnioskować, że $\operatorname{tw}(\boxplus_n) = n$.

Dla dodatniej liczby całkowitej k, mówimy że zbiór wierzchołków S w grafie G jest k-*połączony* jeśli dla każdego podzbioru $X \subseteq V(G)$ o mocy mniejszej niż k, pewna składowa grafu $G - X$ zawiera więcej niż połowę wierzchołków zbioru S. Największą liczbę k dla której w grafie G istnieje zbiór k-połączony oznaczamy przez $\operatorname{link}(G)$. Analogicznie, $\operatorname{wl}(G)$ oznaczna rozmiar największego zbioru wysoce spójnego zawartego w G.

Zadanie 13. Wykazać, że w każdym grafie G zachodzi

$$\operatorname{link}(G) \leqslant \operatorname{bn}(G) \leqslant \operatorname{wl}(G) \leqslant 3\operatorname{link}(G).$$