Parametry związane z szerokością drzewiastą i splątania.

Zadanie 1. Wskazać jeżynę rzędu $n+1$ w kracie $\boxplus_n$. Wywnioskować, że $\mathrm{tw}(\boxplus_n) = n$.

Dla dodatniej liczby całkowitej k, mówimy że zbiór wierzchołków S w grafie G jest k-*połączony* jeśli dla każdego podzbioru $X \subseteq V(G)$ o mocy mniejszej niż k, pewna składowa grafu $G - X$ zawiera więcej niż połowę wierzchołków zbioru S. Największą liczbę k dla której w grafie G istnieje zbiór k-połączony oznaczamy przez $\mathrm{link}(G)$. Analogicznie, $\mathrm{wl}(G)$ oznaczna rozmiar największego zbioru wysoce spójnego zawartego w G.

Zadanie 2. Wykazać, że w każdym grafie G zachodzi

$$\mathrm{link}(G) \leqslant \mathrm{bn}(G) \leqslant \mathrm{wl}(G) \leqslant 3\,\mathrm{link}(G).$$

Zadanie 3. Wykazać, że dla dowolnych separacji (A, B) i (C, D) grafu G zachodzi

$$\mathrm{ord}(A \cap C, B \cup D) + \mathrm{ord}(A \cap C, B \cup D) \leqslant \mathrm{ord}(A, B) + \mathrm{ord}(C, D).$$

Zadanie 4. Niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem rzędu $k \geqslant 1$ grafu G oraz niech (A, B) i (A', B') będą dwoma $(k-1)$-separacjami grafu G. Wykazać, że

(1) jeśli $|V(A)| < k$, to $(A, B) \in \mathcal{T}$;
(2) jeśli $(A, B) \in \mathcal{T}$ oraz $B \subseteq B'$, to $(A', B') \in \mathcal{T}$;
(3) jeśli $(A, B), (A', B') \in \mathcal{T}$ oraz $\mathrm{ord}(A \cup A', B \cap B') < k$, to $(A \cup A', B \cap B') \in \mathcal{T}$.
(4) jeśli $k \geqslant 2$ oraz separacje (A, B) i (A', B') różnią się jedynie na wierzchołkach izolowanych w G, to $(A, B) \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy gdy $(A', B') \in \mathcal{T}$;
(5) jeśli $k \geqslant 3$ oraz $V(A) = V(A')$ i $V(B) = V(B')$, to $(A, B) \in \mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(A', B') \in \mathcal{T}$.

Zadanie 5. Niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem w grafie G, niech κ będzie funkcją rangi dla $\mathcal{T}$ i niech X i I będą takimi podzbiorami wierzchołków, że I jest niezależny w $\mathcal{T}$. Wykazać, że każda rodzina rozłącznych X–I ścieżek w G ma moc co najwyżej $2\kappa(X)$.

Zadanie 6. Niech $\mathcal{T}$ będzie splątaniem w grafie G. Wszystkie zdania typu X *jest niezależny* w tym zadaniu odnoszą się do $\mathcal{T}$-niezależności. Pokaż, że:

(1) $\emptyset$ jest niezależny;
(2) podzbiór zbioru niezależnego jest niezależny;
(3) jeżeli X, Y są niezależne, oraz $|X| < |Y|$ to istnieje $y \in Y \setminus X$ taki, że $X \cup \{y\}$ jest niezależny.

Niech G będzie grafem. Trzy podzbiory $X, Y, Z \subseteq V(G)$ *dotykają się* gdy $X \cap Y \cap Z \neq \emptyset$ lub istnieje krawędź $e \in E(G)$ taka, że każdy ze zbiorów X, Y, Z zawiera przynajmniej jeden koniec krawędzi e. *Maliną* w grafie G nazywamy każdą rodzinę $\mathcal{M} \subseteq 2^{V(G)}$ spełniającą:

(i) każdy $X \in \mathcal{M}$ indukuje spójny podgraf G;
(ii) każde $X, Y, Z \in \mathcal{M}$ dotykają się.

Rząd maliny $\mathcal{M}$ to rozmiar najmniejszego podzbioru $H \subseteq V(G)$ takiego, że dla wszelkich $X \in \mathcal{M}$ mamy $X \cap H \neq \emptyset$. Równoważnie, możemy zauważyć, że każda malina jest jeżyną, a jej rząd jako maliny jest tym samym co jej rząd jako jeżyny.

Zadanie 7. Niech $\mathrm{tn}(G)$ oznacza największy możliwy rząd splątania w G. Pokaż, że $\mathrm{tn}(G)$ jest równe maksymalnemu możliwem rzędowi maliny w G.

Zadanie 8. Pokaż, że dla każdego grafu G zachodzą nierówności

$$\mathrm{tn}(G) \leqslant \mathrm{bn}(G) \leqslant 2\,\mathrm{tn}(G).$$