STRUKTURALNA TEORIA GRAFÓW

MARCIN BRIAŃSKI I PIOTR MICEK

Streszczenie. Notatki do wykładów w ramach kursu *Strukturalna teoria grafów* prowadzonego w semestrze letnim 2023/2024 na Uniwersytecie Jagiellońskim. To jest trzecia edycja kursu[1].

Spis treści

(M. Briański, P. Micek) Instytut Informatyki Analitycznej, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

E-mail address: marcin.brianski@gmail.com, piotr.micek@tcs.uj.edu.pl.

Date: 1 marca 2024 godz. 15:12.

[1]Notatki z drugiej edycji są tutaj.

Wstęp

strona kursu: https://piotrmicek.staff.tcs.uj.edu.pl/strukturalna/

źródła, materiały:

- pierwsza edycja kursu była wzorowana na kursie Jima Geelena *Introduction to Graph Minors* wykładanym na Uniwersytecie w Waterloo na jesieni 2016; nagrania 24 wykładów dostępne są na jego stronie;
- krótkie ale jakże pojemne notatki Sergieja Norina napisane dla kursu *Graph Minor Theory* prowadzonego na Uniwersytecie McGill w Montrealu w 2017 r.;
- *Graphs on Surfaces* Bojana Mohara i Carstena Thomassena to kompendium wiedzy o powierzchniach w teorii grafów;
- praca przeglądowa Ken-ichiego Kawarabayashiego i Bojana Mohara *Some recent progress and applications in graph minor theory*
- rozdział *Graph Minors* w książce Reinharda Diestela *Graph Theory* jest powszechnie uważany za najlepsze wprowadzenie do strukturalnej teorii grafów; książka jest dostępna tutaj.

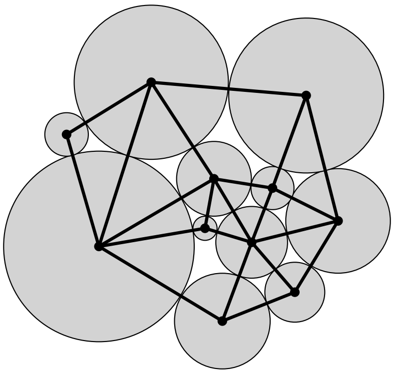
1. Wprowadzenie do minorów

Grafy planarne są obiektem intensywnych badań jeszcze od czasów, gdy nie można było mówić o teorii grafów. Hipoteza o czterech barwach była motorem napędowym badań pokoleń matematyków także po 1976 r., czyli po odkryciu pierwszego komputerowo wspomaganego dowodu hipotezy. Charakteryzacje grafów planarnych w terminach zabronionych minorów, to być może pierwsze twierdzenia budujące dzisiejszą teorię minorów w grafach; zaskakująco głęboki wycinek kombinatoryki z wieloma powiązaniami w matematyce i informatyce. Jednym z naturalnych uogólnień twierdzenia o czterech barwach jest hipoteza Hadwigera, która jest powszechnie uważana za jeden z najważniejszych otwartych problemów w teorii grafów.

Zacznijmy jednak od początku. Mówimy, że graf jest *zanurzony w płaszczyznę*, jeśli jego wierzchołkami są różne punkty płaszczyzny, każda krawędź grafu jest krzywą[2] na płaszczyźnie między punktami będącymi końcami tej krawędzi i wnętrze żadnej krawędzi nie zawiera żadnego wierzchołka grafu ani nie przecina żadnej innej krawędzi. *Grafem planarnym* nazywamy graf, który jest izomorficzny z pewnym grafem zanurzonym w płaszczyznę.

Grafy planarne mają wiele ciekawych i głębokich własności. Dla przykładu, twierdzenie Koebego (ang. *circle packing theorem*) mówi, że każdy graf planarny jest grafem styczności pewnej rodziny kół na płaszczyźnie, patrz Rysunek 1. Z takiej reprezentacji natychmiast wynika, że każdy graf planarny ma zanurzenie w płaszczyznę takie, że wszystkie krawędzie są odcinkami.

[2] Tutaj przez *krzywą* rozumiemy homeomorficzny obraz przedziału domkniętego $[0, 1]$. Jeśli krzywa e jest obrazem przedziału $[0, 1]$ przez homeomorfizm $f\colon [0, 1] \to e$, to mówimy, że krzywa e jest *między* punktami $f(0)$ a $f(1)$, a jej *wnętrzem* nazywamy obraz $f((0, 1))$ przedziału otwartego $(0, 1)$.



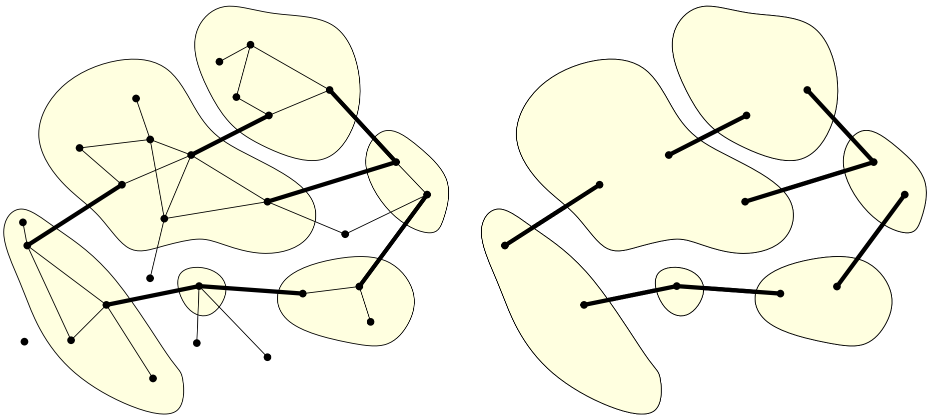
Rysunek 1. Graf planarny i jego reprezentacja jako graf styczności rodziny kół.

Aby uzasadnić, że rozważany graf jest planarny, najłatwiej po prostu go narysować na płaszczyźnie. Jak uzasadnić, że rozważany graf *nie* jest planarny? Okazuje się, że jeśli wypracujemy odpowiednie pojęcie podstruktury w grafie to istnieją jedynie dwie przeszkody dla planarności. W ten sposób dochodzimy do kluczowych definicji dla tego kursu.

Modelem grafu H w grafie G jest funkcja ϕ przyporządkowująca każdemu wierzchołkowi $v \in V(H)$ spójny podgraf $\phi(v)$ grafu G, a każdej krawędzi $e \in E(H)$ krawędź $\phi(e) \in E(G)$ w taki sposób, że

(i) $V(\phi(u)) \cap V(\phi(v)) = \emptyset$ dla różnych $u, v \in V(H)$;
(ii) dla każdej krawędzi uv grafu H, krawędź $\phi(uv)$ ma końce w $V(\phi(u))$ i $V(\phi(v))$.

Graf H jest *minorem* grafu G, jeśli G ma model H. Piszemy wtedy $H \preccurlyeq G$.



Rysunek 2. Wizualizacja modelu minoru w grafie. Po lewej żółte obszary odpowiadają podgrafom $\phi(v)$ grafu G dla $v \in V(H)$. Po prawej żółte obszary to wierzchołki grafu H.

Ćwiczenie. Wykazać, że graf H jest minorem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy możemy otrzymać graf izomorficzny do H rozpoczynając od G i wykonując ciąg operacji:

(i) usunięcie wierzchołka;
(ii) usunięcie krawędzi;
(iii) *kontrakcja* krawędzi, czyli ściągnięcie krawędzi łączącej dwa wierzchołki u i v do jednego wierzchołka, którego sąsiadami są te wierzchołki, które sąsiadują z u lub v.

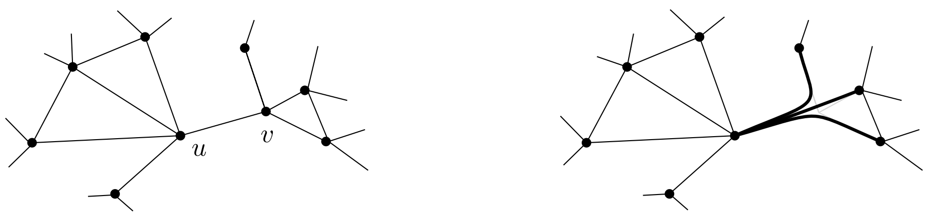
Wspomniane dwie przeszkody dla planarności grafu to minor K_5 i minor $K_{3,3}$.

Twierdzenie 1.1 (Kuratowski 1930; Wagner 1937)**.** *Graf G jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera K_5 ani $K_{3,3}$ jako minoru.*

Grafy planarne to nie jedyna naturalna klasa grafów scharakteryzowana w terminach zabronionych minorów. Graf G jest *lasem*, jeśli nie zawiera cyklu jako podgrafu. Łatwo widać, że G jest lasem wtedy i tylko, gdy $K_3 \not\preccurlyeq G$. Graf G jest *zewnętrznie planarny*, jeśli G ma takie zanurzenie w płaszczyznę, że wszystkie wierzchołki G leżą na jednej (zewnętrznej) ścianie[3]. Okazuje się, że G jest zewnętrznie planarny wtedy i tylko, gdy $K_{2,3} \not\preccurlyeq G$ i $K_4 \not\preccurlyeq G$. Kolejny przykład to grafy bez ścieżki na k wierzchołkach, jako podgrafu. Łatwo widać, że $P_k \not\subseteq G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P_k \not\preccurlyeq G$.

Klasa grafów $\mathcal{G}$ jest *zamknięta na branie minorów*, jeżeli dla każdego $G \in \mathcal{G}$ wszystkie minory grafu G należą do $\mathcal{G}$.

Zauważmy, że wszystkie rozważane powyżej klasy grafów są zamknięte na branie minorów. Dla przykładu przyjrzyjmy się grafom planarnym: jeśli G ma zanurzenie w płaszczyznę to w oczywisty sposób po usunięciu dowolnego wierzchołka lub krawędzi powstały graf wciąż ma zanurzenie w płaszczyznę; jeśli zaś skontraktujemy krawędź to możemy otrzymać zanurzenie nowego grafu modyfikując zanurzenie wyjściowego grafu, patrz Rysunek 3.



Rysunek 3. Po lewej: zanurzenie grafu w płaszczyznę. Po prawej: zanurzenie grafu otrzymanego po kontrakcji krawędzi uv. Nowy wierzchołek narysowany jest na miejscu wierzchołka u.

Okazuje się, że wszystkie wymienione charakteryzacje są szczególnymi przypadkami głębokiego twierdzenia—otóż każda klasa zamknięta na branie minorów ma skończoną listę grafów, które ją charakteryzują w terminach zabronionych minorów.

Twierdzenie 1.2 (Robertsona-Seymoura)**.** *Dla każdej klasy $\mathcal{G}$ zamkniętej na branie minorów istnieje skończony zbiór grafów $\{H_1, \ldots, H_k\}$ o tej własności, że $\mathcal{G}$ składa się dokładnie z tych grafów, dla których żaden z $H_1, \ldots, H_k$ nie jest minorem.*

[3]Pojęcie ściany zostanie sformalizowane w rozdziale **??** o grafach na powierzchniach.

Dla dowolnej klasy $\mathcal{G}$ zamkniętej na branie minorów, możemy rozważyć najmniejszy zbiór $\{H_1, \ldots, H_k\}$ zabronionych minorów który charakteryzuje klasę $\mathcal{G}$. Zbiór ten jest wyznaczony jednoznacznie z dokładnością do izomorfizmu grafów i oznaczamy go przez $\mathrm{Forb}(\mathcal{G})$. Zatem zbiór $\mathrm{Forb}(\mathcal{G})$ jest maksymalną rodziną takich nieizomorficznych grafów H, że H nie należy do $\mathcal{G}$, ale każdy właściwy minor grafu H należy do $\mathcal{G}$.

Zanim Robertson i Seymour udowodnili swoje twierdzenie, było ono znane jako hipoteza Wagnera. W literaturze możemy znaleźć kilka równoważnych wypowiedzi tego wyniku.

Ćwiczenie. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

(i) Każda zamknięta na branie minorów klasa grafów $\mathcal{G}$ jest określona przez pewien skończony zbiór $\{H_1, \ldots, H_k\}$ zabronionych minorów, to znaczy taki zbiór, że $\mathcal{G}$ składa się dokładnie z takich grafów G, że żaden graf H_i nie jest minorem G.
(ii) Z każdego nieskończonego zbioru grafów da się wybrać dwa takie, że jeden jest minorem drugiego.
(iii) Istnieje przeliczalnie wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów.
(iv) Dla każdej zamkniętej na branie minorów klasy grafów problem przynależności do klasy jest rozstrzygalny.

Neil Robertson i Paul Seymour przedstawili dowód twierdzenia 1.2 w serii prac zatytułowanej *Graph Minors* publikowanych w latach 1983-2011. Seria ta składa się z ponad 20 prac obejmujących łącznie prawie 750 stron.

Dla dowolnej klasy grafów $\mathcal{G}$ zamkniętej na branie minorów możemy rozważyć problem decyzyjny przynależności podanego na wejściu grafu do $\mathcal{G}$. Z twierdzenia 1.2 wiemy, że rozwiązanie tego problemu sprowadza sie do rozwiązania:

Problem H-MINOR-TESTING.

Wejście: graf G
Wyjście: TAK, jeśli H jest minorem G, NIE w przeciwnym przypadku.

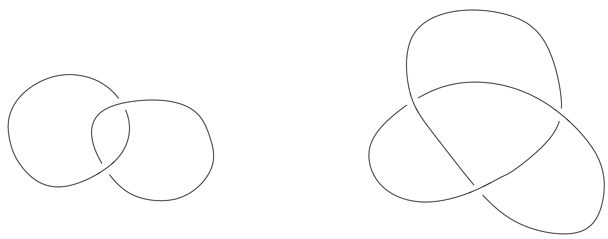
Robertson i Seymour opracowali algorytm, który dla ustalonego grafu H rozwiązuje H-MINOR-TESTING w czasie $\mathcal{O}(n^3)$, gdzie $n = |V(G)|$. Pod koniec 2016 roku Bruce Reed ogłosił istnienie algorytmu działającego w czasie $\mathcal{O}(n)$.

Przyjrzyjmy się teraz przykładom klas grafów zamkniętych na branie minorów.

Jeden sposób w jaki możemy zdefiniować takie klasy, to przez pewne zabronione podstruktury, które możemy wyrazić w terminach zabronionych minorów. Przykładowo, klasycznie las jest definiowany jako graf, który nie zawiera cyklu jako podgrafu. Jednakże, jak już wspomnieliśmy, jest to równoważne temu, że graf nie zawiera cyklu C_3 jako minor. Podobnie, klasę grafów niezawierających ścieżki na k wierzchołkach (w sensie podgrafu) można zdefiniować jako klasę grafów bez P_k-minoru. Klasa grafów bez k rozłącznych cykli to klasa grafów zdefiniowana przez zabronienie grafu skłądającego się z k rozłącznych trójkątów jako minoru. Klasa grafów bez cyklów długości większej niż k to klasa grafów zdefiniowana przez zabronienie C_{k+1} jako minoru. Klasa grafów o co najwyżej k wierzchołkach to klasa zdefiniowana przez zabronienie $\overline{K_{k+1}}$) jako minoru.

Wiele klas grafów zamkniętych na branie minorów można zdefiniować topologicznie. Grafy planarne to te grafy, które można zanurzyć w płaszczyźnie. Zgodnie z twierdzeniem Wagnera, dla klasy grafów planarnych mamy dwa zabronione minory: K_5 i $K_{3,3}$. Ogólniej, dla dowolnej zwartej dwuwymiarowej rozmaitości topologicznej, czyli powierzchni[4], grafy zanurzalne w nią tworzą klasę zamkniętą na branie minorów. Dla płaszczyzny rzutowej lista zabronionych minorów składa się z 35 grafów, a dla torusa nie jest znana pełna lista zabronionych minorów, wiadomo, że jest ich co najmniej 16 tysięcy. Grafy zewnętrznie planarne można scharakteryzować jako te, które da się tak zanurzyć w dysku, aby wszystkie wierzchołki leżały na brzegu. Ponownie, możemy ten przykład uogólnić do dowolnej dwuwymiarowej rozmaitości topologicznej z brzegiem i klasa grafów zanurzalnych w tę rozmaitość ze wszystkimi wierzchołkami na brzegu utworzy nam klasę zamkniętą na branie minorów.

Łatwo przekonać, się, że w przestrzeń trójwymiarową da się zanurzyć wszystkie grafy. Możemy jednak otrzymać ciekawe klasy grafów, gdy będziemy rozważać jedynie takie grafy, które da się tak zanurzyć w przestrzeń trójwymiarową, by był spełniony pewien dodatkowy warunek. Jeżeli będziemy wymagać, by w zanurzeniu żadne dwa cykle nie były połączone tak jak dwa kolejne ogniwa w łańcuchu, to otrzymamy klasę zamkniętą na branie minorów (ang. *linklessly embeddable graphs*). Klasa ta może być scharakteryzowana za pomocą listy siedmiu zabronionych minorów. Podobnie, jeśli rozważymy klasę grafów która da się tak zanurzyć w przestrzeń, aby żaden cykl nie tworzył węzła, to również otrzymamy klasę zamkniętą na branie minorów (ang. *knotlessly embeddable graphs*). Nie jest znany algorytm, który rozstrzyga, czy graf należy do tej klasy. Jednak na mocy twierdzenia Robertsona-Seymoura wiemy, że taki algorytm istnieje. Nie jesteśmy jednak w stanie skonstruować tego algorytmu i nawet, gdybyśmy mieli taki algorytm, to nie umielibyśmy o nim pokazać że jest prawidłowy!



Rysunek 4. Zabronione struktury w linklessly embeddable graphs (dwa połączone cykle) i w knotlessly embeddable graphs (węzeł).

Możemy również definiować klasy zamknięte na branie minorów strukturalnie, rozważając grafy dla których pewien parametr jest ograniczony. Parametrem, który jest dla nas szczególnie ważny jest szerokość drzewiasta. Nieformalnie, szerokość

[4]Patrz rozdział **??**

drzewiasta grafu opisuje jak bardzo ten graf przypomina drzewo — im mniejsza szerokość drzewiasta, tym większe podobieństwo do drzewa. *Szerokość drzewiasta* $\mathrm{tw}(G)$ (ang. *treewidth*) grafu G to najmniejsza taka liczba k, że istnieje drzewo T oraz rodzina $\{T_u : u \in V(G)\}$ poddrzew drzewa T o tej własności, że

(i) dla każdej krawędzi uv grafu G drzewa T_u i T_v się przecinają oraz
(ii) każdy wierzchołek drzewa T należy do co najwyżej $k+1$ poddrzew T_u.

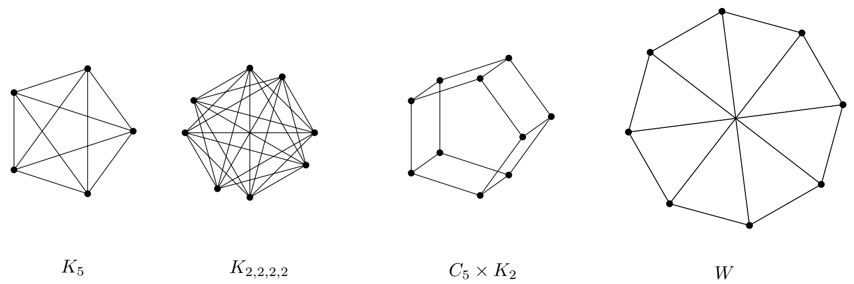
Dla T oraz $\{T_u : u \in V(G)\}$ jak wyżej możemy rozważyć rodzinę $\mathcal{B} = \{B_t : t \in V(T)\}$, gdzie dla każdego węzła $t \in V(T)$, $B_t = \{u \in V(G) : t \in V(T_u)\}$. Wówczas spełnione są warunki:

(T1) $\bigcup_{t \in V(T)} B_t = V(G)$,
(T2) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $t \in V(T)$ o tej własności, że $u, v \in B_t$,
(T3) dla dowolnych węzłów $t_1, t_2, t_3 \in V(T)$, jeżeli t_2 leży na ścieżce między węzłami t_1 i t_3 w T, to $B_{t_1} \cap B_{t_3} \subseteq B_{t_2}$.

Dekompozycją drzewiastą grafu G nazywamy dowolną parę $(T, \mathcal{B})$, spełniającą warunki (T1)–(T3). *Szerokością* dekompozycji $(T, \mathcal{B})$ nazywamy wartość $\max_{t \in V(T)} |B_t| - 1$. Szerokość drzewiastą grafu G można równoważnie zdefiniować jako najmniejszą szerokość dekompozycji drzewiastej tego grafu. Zbiory B_t nazywamy *workami* dekompozycji.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeśli $H \preceq G$, to $\mathrm{tw}(H) \leqslant \mathrm{tw}(G)$. Zateam dla każdej dodatniej liczby całkowitej k, grafy o szerokości drzewiastej co najwyżej k tworzą klasę zamkniętą na branie minorów.

Rozważmy klasę wszystkich grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej k. Dla $k = 1$ zabroniony minor to K_3, dla $k = 2$ zabroniony minor to K_4. Dla $k = 3$ lista zabronionych minorów liczy 4 grafy (patrz Rysunek 1).



Rysunek 5. Zabronione minory dla grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej 3.

Możemy też otrzymywać nowe klasy zamknięte na branie minorów z innych za pomocą konstrukcji. Dla dowolnej klasy grafów $\mathcal{G}$ oraz nieujemnej liczby całkowitej, niech $\mathcal{G}^{+k}$ oznacza klasę wszystkich grafów G o tej własności, że po usunięciu pewnych co najwyżej k wierzchołków z G można otrzymać graf z klasy $\mathcal{G}$.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeżeli $\mathcal{G}$ jest zamknięta na branie minorów, to $\mathcal{G}^{+k}$ również jest zamknięta na branie minorów.

Przykładowo, jeżeli $\mathcal{G}$ jest klasą grafów planarnych, to $\mathcal{G}^{+1}$ to tak zwane *grafy apeksowe* (ang. *apex graphs*) czyli klasa takich grafów, z których można otrzymać graf planarny przez usunięcie co najwyżej jednego wierzchołka. Jeżeli zaś $\mathcal{G}$ jest klasą lasów, to $\mathcal{G}^{+k}$ jest klasą grafów dla których istnieje zbiór rozrywający cykle (ang. *feedback vertex set*) mocy co najwyżej k. Inną operacją pozwalającą na otrzymanie nowej klasy zamkniętej na branie minorów z innej jest domknięcie na sumy klikowe. Jeśli G_1 i G_2 są takimi dwoma grafami, że ich przecięcie $K = G_1 \cap G_2$ jest wspólną kliką tych grafów oraz niech $F \subseteq E(K)$, to graf $(G_1 \cup G_2) - F$ nazywamy *sumą klikową* (ang. *clique-sum*) grafów G_1 i G_2. Dla dowolnej klasy grafów $\mathcal{G}$, jej *domknięciem na sumy klikowe* nazywamy zbiór wszystkich grafów, które możemy otrzymać z grafów w klasie $\mathcal{G}$ za pomocą wielokrotnych operacji sumy klikowej.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeżeli $\mathcal{G}$ jest zamknięta na branie minorów, to jej domknięcie na sumy klikowe również jest zamknięte na branie minorów.

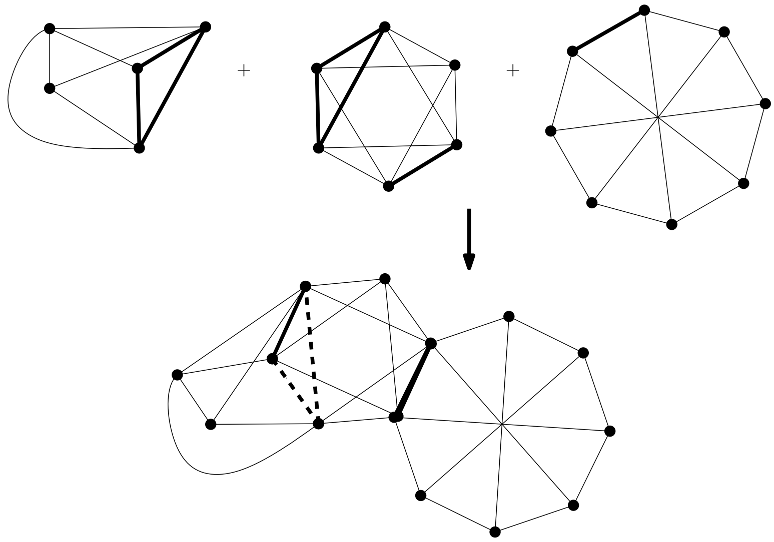
Przykładowo, domknięcie klasy wszystkich grafów o mocy co najwyżej $k+1$ na sumy klikowe jest klasą wszystkich grafów o szerokości drzewiastej co najwyżej k.

2. „Jakościowe” twierdzenia strukturalne

Głównym narzędziem użytym przez Robertsona i Seymoura w dowodzie ich twierdzenia jest tak zwane twierdzenie o strukturze grafów (ang. *graph structure theorem*). Twierdzenie o strukturze grafów jest najważniejszym owocem prac Robertsona i Seymoura mającym liczne zastosowania w kombinatoryce i algorytmice. Charakteryzuje ono klasy grafów bez pewnego K_n-minoru jako te, dla których istnieje powierzchnia, że wszystkie grafy w klasie można otrzymać lekko modyfikując zanurzenia grafów w tę powierzchnię. Wypowiedź tego twierdzenia jest dość techniczna i podamy ją później, gdy poznamy wszystkie pojęcia potrzebne do sformułowania jej.

Dla wszystkich n nie większych niż 5 znamy charakteryzacje grafów bez K_n-minoru, które opisują prostą strukturę takich grafów. Grafy bez K_3-minoru to po prostu lasy, grafy bez K_4-minoru to grafy o szerokości drzewiastej co najwyżej 2. Grafy bez K_5-minoru to grafy, które można otrzymać za pomocą sum klikowych dowolnej liczby grafów planarnych oraz kopii grafu Wagnera (patrz rysunek 6). To są jednak szczególne przypadki, a dla $n \geqslant 6$ nie znamy dokładnej charakteryzacji grafów bez K_n-minoru.

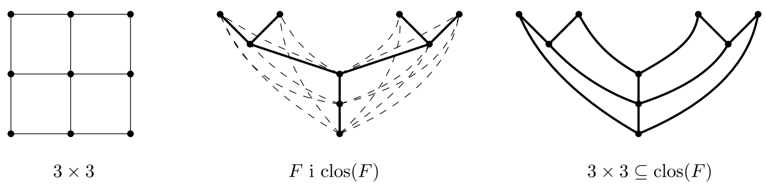
Twierdzenie o strukturze grafów nie daje nam pełnej charakteryzacji grafów bez K_n-minoru, a zamiast tego podaje charakteryzację *klas* grafów w których nie znajdziemy dowolnie dużych klik jako minorów. Jest to więc przykład „jakościowego” twierdzenia strukturalnego. Poniżej podamy kilka przykładów jakościowych twierdzeń strukturalnych.



RYSUNEK 6. Sklejenie dwu triangulacji i grafu Wagnera.

Jako najprostszy przykład rozważmy nie grafy bez dużych klik jako minorów a bez długich ścieżek jako minorów. Strukturę takich grafów można opisać w terminach parametru zwanego głębokością drzewiastą.

Ukorzenionym lasem nazywamy sumę rozłącznych ukorzenionych drzew. *Wysokością* ukorzenionego lasu F nazywamy maksymalną liczbę wierzchołków na ścieżce od korzenia do liścia w F. *Domknięcie* $\mathrm{clos}(F)$ ukorzenionego lasu F, to graf powstały przez dodanie w F krawędzi łączących każdy wierzchołek z wszystkimi jego przodkami. *Głębokość drzewiasta* (ang. *treedepth*) grafu G, oznaczana $\mathrm{td}(G)$, to najmniejsza liczba k taka, że istnieje ukorzeniony las F o wysokości k taki, że $G \subseteq \mathrm{clos}(F)$.



RYSUNEK 7. Krata 3×3 zanurzona w domknięcie drzewa wysokości 5.

Ćwiczenie. Wykazać, że jeśli $H \preccurlyeq G$, to $\mathrm{td}(H) \leqslant \mathrm{td}(G)$. Zatem klasa grafów o głębokości drzewiastej co najwyżej k jest zamknięta na branie minorów.

Ćwiczenie. Wykazać, że ścieżki mają dowolnie dużą głębokość drzewiastą.

Nieformalnie, strukturalne twierdzenie dla ścieżek mówi, że graf zawiera długą ścieżkę wtedy i tylko wtedy gdy ma dużą głębokość drzewiastą. Formalna wypowiedź jest następująca.

Twierdzenie 2.1. *Dla każdej klasy grafów $\mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje $k \in \mathbb{N}$, że żaden graf w $\mathcal{C}$ nie zawiera ścieżki P_k jako minoru,*
(ii) *istnieje $d \in \mathbb{N}$, że $\mathrm{td}(G) \leqslant d$ dla każdego $G \in \mathcal{C}$.*

Dowód. Dla dowodu implikacji (i) $\Rightarrow$ (ii), załóżmy, że P_k nie jest minorem żadnego grafu w $\mathcal{C}$ i niech $G \in \mathcal{C}$. Niech F będzie dowolnym ukorzenionym lasem DFS grafu G. Wtedy wysokość F to co najwyżej $k-1$ bo każda ścieżka od korzenia do liścia w F jest ścieżką w G. Zauważmy, że $G \subseteq \operatorname{clos}(F)$ bo każda krawędź grafu G łączy przodka z potomkiem w lesie DFS. Zatem $\operatorname{td}(G) \leqslant k-1$, co kończy dowód pierwszej implikacji.

Implikacja (ii) $\Rightarrow$ (i) wynika z faktu, że ścieżki mają nieograniczoną głębokość drzewiastą, którego dowód zostawiliśmy jako ćwiczenie. □

Kolejny przykład dotyczy grafów, które nie zawierają wielu rozłącznych cykli (jako podgrafów). Dla ustalonego k, jaką strukturę mają grafy bez k rozłącznych cykli? Zwracamy uwagę, że graf nie zawiera k rozłącznych cykli wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera on minoru $k \times C_3$ (to jest k rozłącznych kopii 3-cyklu). Zauważmy, że jeśli z grafu można usunąć mniej niż k wierzchołków tak aby pozostałe wierzchołki indukowały las, to graf ten nie zawiera k rozłącznych cykli, gdyż każdy cykl w grafie musi zawierać któryś z usuniętych wierzchołków. Okazuje się, że jeśli graf nie zawiera wielu rozłącznych cykli, to zawsze można z niego otrzymać las usuwając „niewielki" zbiór wierzchołków. Mówi o tym następujące powszechnie znane twierdzenie.

Twierdzenie 2.2 (Erdős-Pósa, 1965)**.** *Istnieje funkcja $f(k) = O(k \log k)$ taka, że dla każdego $k \geqslant 1$ i każdego grafu G zachodzi:*

(i) *G ma k rozłącznych cykli lub*
(ii) *istnieje podzbiór $X \subseteq V(G)$ taki, że $|X| < f(k)$ oraz $G - X$ nie ma żadnych cykli (jest lasem).*

Funkcja $O(k \log k)$ w powyższym twierdzeniu jest najlepsza możliwa. Twierdzenie to udowodnimy przy okazji dowodu twierdzenia o kracie, z gorszą złożonością funkcji f. Nawet z tą gorszą funkcją możemy wywnioskować następujące strukturalne twierdzenie dla grafów bez wielu rozłącznych cykli.

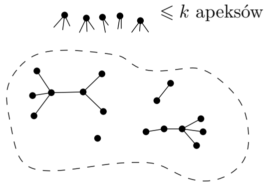
Wniosek 2.3. *Dla każdej klasy grafów $\mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje $k \in \mathbb{N}$, że żaden graf w $\mathcal{C}$ nie zawiera k rozłącznych cykli,*
(ii) *istnieje $m \in \mathbb{N}$, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ istnieje taki zbiór wierzchołków X, że $|X| < m$ oraz $G - X$ jest lasem.*

Nieformalnie więc, graf nie zawiera wielu rozłącznych cykli wtedy i tylko wtedy gdy ma on mały zbiór rozrywający wszystkie cykle.

Rozważmy teraz klasę grafów bez ustalonego drzewa, czy też lasu, jako minoru. Takie klasy będziemy mogli opisać przy pomocy szerokości ścieżkowej.

Dekompozycją ścieżkową grafu G nazywamy dekompozcję drzewiastą $(T, \mathcal{B})$ grafu G w której T jest ścieżką. *Szerokość ścieżkowa G*, oznaczana przez $\operatorname{pw}(G)$, to najmniejsza szerokość dekompozycji ścieżkowej G. Dowód poniższego twierdzenia zostanie rozpisany w jednym z kolejnych rozdziałów.



Rysunek 8. Graf z klasy $\mathcal{H}_k$.

Twierdzenie 2.4 (Bienstock, Robertson, Seymour, Thomas; 1983)**.** *Dla każdego n-wierzchołkowego lasu F i dla każdego grafu G,*

$$\textit{jeśli } \operatorname{pw}(G) \geqslant n-1, \ \textit{to } F \preccurlyeq G.$$

Ćwiczenie. Wykazać, że drzewa mogą mieć dowolnie dużą szerokość ścieżkową.

Wniosek 2.5. *Dla każdej klasy grafów $\mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje $k \in \mathbb{N}$, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi* $\operatorname{pw}(G) \leqslant k$*,*
(ii) *istnieje taki las H, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi $H \not\preccurlyeq G$.*

Kolejny przykład jest jednym z najważniejszych twierdzeń w teorii minorów i dotyczy grafów, które nie zawierają ustalonego grafu planarnego jako minoru. Niech n i m będą dodatnimi liczbami naturalnymi. *Krata $n \times m$* to graf o zbiorze wierzchołków $\{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\}$ w którym wierzchołki (i, j) oraz (i', j') są połączone krawędzią jeśli $|i' - i| + |j' - j| = 1$. Kratę $n \times n$ będziemy oznaczać przez $\boxplus_n$.

Twierdzenie 2.6 (o kracie, Robertson, Seymour; 1986)**.** *Istnieje taka funkcja f, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdego grafu G,*

$$\textit{jeśli } \operatorname{tw}(G) \geqslant f(n), \ \textit{to } \boxplus_n \preccurlyeq G.$$

Obecnie najlepsze znane ograniczenie dla funkcji f to $\mathcal{O}(n^9 \operatorname{poly} \log n)$ podane przez Chuzhoy i Tana w 2019.

Jako że każdy graf planarny jest minorem pewnej kraty, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 2.7. *Istnieje taka funkcja f, że dla każdego grafu planarnego H,*

$$\textit{jeśli } H \not\preccurlyeq G, \ \textit{to } \operatorname{tw}(G) \leqslant f(H).$$

Ćwiczenie. Jak duża krata jest potrzebna, aby każdy n-wierzchołkowy graf planarny był jej minorem?

Z drugiej strony, jeśli rozważymy graf nieplanarny H, to klasa grafów niezawierających H jako minoru zawiera wszystkie grafy planarne i w szczególności wszystkie kraty. Ponieważ, kraty mają dowolnie dużą szerokość drzewiastą (patrz ćwiczenie poniżej), grafy z takiej klasy mają nieograniczoną szerokość drzewiastą. Otrzymujemy więc charakteryzację grafów planarnych.

Ćwiczenie. Wykazać, że kraty mają dowolnie dużą szerokość drzewiastą. (Już niedługo zobaczymy jak dowodzić, że szerokość drzewiasta jest duża. Póki co, chodzi o to aby zmierzyć się z tym samemu i dojść do jakiejkolwiek funkcji $f(k)$ takiej, że $\operatorname{tw}(\boxplus_{f(k)}) \geqslant k$.)

Wniosek 2.8. *Dla każdej klasy grafów $\mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne:*

(i) *istnieje $k \in \mathbb{N}$, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi* $\operatorname{tw}(G) \leqslant k$,
(ii) *istnieje taki graf plananry H, że dla każdego $G \in \mathcal{C}$ zachodzi $H \not\preccurlyeq G$.*

3. Gęstość i liczba chromatyczna grafów bez K_r-minoru

Dla niepustego grafu G, przez $\delta(G)$ oznaczamy najmniejszy stopień wierzchołka grafu G, przez $d(G)$ oznaczamy średni stopień wierzchołka w G, czyli $d(G) = 2|E(G)|/|V(G)|$, a przez $\Delta(G)$ oznaczamy największy stopień wierzchołka w G. Oczywiście $\delta(G) \leqslant d(G) \leqslant \Delta(G)$. *Gęstością* $\varepsilon(G)$ grafu G nazywamy stosunek $|E(G)|/|V(G)|$. Oczywiście $\varepsilon(G) = d(G)/2$.

W tym rozdziale rozważamy następujący problem natury ekstremalnej: jaka jest najmniejsza liczba m, że każdy graf o n wierzchołkach i m krawędziach zawiera K_r jako minor? Na analogiczne pytanie, w którym zamiast minorów rozważamy podgrafy, odpowiada twierdzenie Turána. Dla liczb naturalnych n i r, *graf Turána* $T(n, r)$ to graf powstały przez podział n wierzchołków na r możliwie równych części i dodanie krawędzi pomiędzy wierzchołkami w różnych częściach.

Twierdzenie 3.1 (Turán 1941)**.** *Dla dowolnych takich liczb naturalnych n i r, że $r \geqslant 2$ spośród wszystkich grafów n-wierzchołkowych bez K_r jako podgrafu, najwięcej krawędzi ma graf Turána $T(n, r-1)$.*

Jako że $|E(T(n, r-1))| \geqslant \frac{1}{2}n^2\frac{r-2}{r-1}$, widzimy, że dla ustalonego $r \geqslant 2$, istnieje n-wierzchołkowy graf o średnim stopniu $\Omega(n)$ bez K_r jako podgrafu. Aby wymusić K_r jako minor wystarczy dużo mniejszy średni stopień.

Propozycja 3.2. Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego grafu G,

$$\text{jeśli } d(G) \geqslant 2^{r-2}, \text{ to } K_r \preccurlyeq G.$$

Dowód. Prowadzimy indukcję względem r. Dla $r \leqslant 2$ wynik jest oczywisty. Przyjmijmy więc, że $r \geqslant 3$ i niech G będzie grafem o średnim stopniu co najmniej 2^{r-2}. Niech H będzie takim minorem grafu G, że średni stopień H wynosi co najmniej 2^{r-2}, ale każdy niepusty właściwy minor H ma średni stopień mniejszy niż 2^{r-2}. Wówczas $2|E(H)|/|V(H)| \geqslant 2^{r-2}$, czyli $\varepsilon(H) = |E(H)|/|V(H)| \geqslant 2^{r-3}$. Graf H jest niepustym grafem bez wierzchołków izolowanych. Ustalmy dowolny wierzchołek $x \in V(H)$. Wówczas dla każdego $y \in N_H(x)$, wierzchołki x i y mają co najmniej 2^{r-3} wspólnych sąsiadów w H; istotnie, w przeciwnym razie mielibyśmy $\varepsilon(H/xy) \geqslant (E(H) - 2^{r-3})/(V(H) - 1) \geqslant 2^{r-3}$. Stąd wynika, że graf $H[N_H(x)]$ ma minimalny stopień $\geqslant 2^{r-3}$. Na mocy założenia indukcyjnego mamy więc $K_{r-1} \preccurlyeq H[N_H(x)]$. Model grafu K_{r-1} w $H[N_H(x)]$ możemy rozszerzyć do modelu grafu K_r w H, gdzie nowy wierzchołek modelowany jest zbiorem $\{x\}$. Zatem $K_r \preccurlyeq H \preccurlyeq G$, co kończy dowód. □

Okazuje się, że wystarczy mieć ograniczenie $d(G) \geqslant cr\sqrt{\log r}$ dla pewnej stałej c aby wymusić $K_r \preccurlyeq G$. Wiadomo też, że powyższe ograniczenie $\mathcal{O}(r\sqrt{\log r})$ jest asymptotycznie optymalne.

Innym naturalnym problemem ekstremalnym jest maksymalna gęstość grafów bez K_r jako minoru topologicznego. *Modelem topologicznym* grafu H w grafie G jest funkcja ϕ która przypisuje każdemu wierzchołkowi $v \in V(H)$ wierzchołek $\phi(v)$ grafu G, a każdej krawędzi $e \in E(H)$ ścieżkę $\phi(e)$ w grafie G w taki sposób, że

(i) $\phi(u) \neq \phi(v)$ dla różnych wierzchołków $u, v \in V(H)$,
(ii) dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$ ścieżka $\phi(uv)$ ma końce w $\phi(u)$ i $\phi(v)$ oraz
(iii) ścieżki $\phi(e)$ i $\phi(e')$ są rozłączne poza końcami dla dowolnych dwu różnych krawędzi $e, e' \in E(H)$.

Jeżeli istnieje model topologiczny grafu H w grafie G, to mówimy, że H jest *minorem topologicznym* grafu G i piszemy $H \preccurlyeq_{\text{top}} G$.

Ćwiczenie.

(i) Jeśli $H \preccurlyeq_{\text{top}} G$, to $H \preccurlyeq G$.
(ii) Istnieją takie H i G, że $H \preccurlyeq G$ ale $H \not\preccurlyeq_{\text{top}} G$.
(iii) Jeśli stopień każdego wierzchołka grafu H wynosi co najwyżej 3, to $H \preccurlyeq G$ implikuje $H \preccurlyeq_{\text{top}} G$.

Pokażemy, że grafy o odpowiednio dużym średnim stopniu zawierają K_r jako minor topologiczny.

Propozycja 3.3. Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego grafu G,

$$\text{jeśli } d(G) \geqslant 2^{\binom{r}{2}}, \text{ to } K_r \preccurlyeq_{\text{top}} G.$$

Zanim przejdziemy do dowodu, udowodnimy dwa pomocnicze lematy.

Lemat 3.4. *Każdy graf G zawierający co najmniej jedną krawędź ma taki podgraf H, że $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$.*

Dowód. Rozważmy procedurę polegającą na sukcesywnym usuwaniu wierzchołków o stopniu nie większym od gęstości grafu, aż do momentu gdy już nie będzie takich wierzchołków. Za każdym razem gdy usuwamy wierzchołek o stopniu nie większym niż gęstość grafu, otrzymujemy graf o nie mniejszej gęstości. Ponieważ G ma co najmniej jedną krawędź, $\varepsilon(G) > 0$. Zatem procedura musi się zakończyć na niepustym podgrafie, gdyż $\varepsilon(K_1) = 0$. Otrzymamy więc taki ciąg podgrafów $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_k$ o gęstościach co najmniej $\varepsilon(G)$, że $\delta(G_i) \leqslant \varepsilon(G_i)$ dla $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ oraz $\delta(G_k) > \varepsilon(G_k)$. Stąd graf $H = G_k$ spełnia $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G)$. □

Lemat 3.5. *Każdy graf G ma cykl o długości co najmniej $\delta(G)+1$ (o ile $\delta(G) \geqslant 2$).*

Dowód. Niech $x_0 \dots x_k$ będzie najdłuższą ścieżką w grafie G. Wówczas każdy z co najmniej $\delta(G)$ sąsiadów wierzchołka x_0 leży na tej ścieżce. Największy taki indeks i, że x_i jest sąsiadem x_0 musi więc spełniać $i \geqslant \delta(G)$. Stąd $x_0 x_1 \dots x_i x_0$ jest szukanym cyklem. □

Dowód Propozycji 3.3. Propozycja jest prawdziwa dla $r \leqslant 2$. Załóżmy więc, że $r \geqslant 3$. Udowodnimy indukcyjnie, że dla każdego $m \in \{r, \dots, \binom{r}{2}\}$, jeśli $d(G) \geqslant 2^m$, to istnieje minor topologiczny H grafu G o r wierzchołkach i m krawędziach.

Rozważmy najpierw przypadek $m = r$. Na mocy lematu 3.4, istnieje podgraf H grafu G, że $\delta(H) > \varepsilon(H) \geqslant \varepsilon(G) \geqslant 2^{r-1} \geqslant r+1$. Zatem, na mocy lematu 3.5 graf H zawiera cykl długości co najmniej r. Stąd $C_r \preccurlyeq_{\text{top}} H \subseteq G$, czyli C_r jest szukanym minorem topologicznym.

Teraz załóżmy, że $r < m \leqslant \binom{r}{2}$. Graf G musi zawierać składową mającą nie mniejszą gęstość niż on sam, więc zawężając się do tej składowej możemy założyć, że G jest spójny. Mamy $d(G) \geqslant 2^m$, więc $\varepsilon(G) \geqslant 2^{m-1}$. Niech U będzie maksymalnym podzbiorem $V(G)$ o tej własności, że $G[U]$ jest spójny i $\varepsilon(G/U) \geqslant 2^{m-1}$. Zbiór U jest dobrze zdefiniowany, bo możemy wziąć jako U dowolny zbiór jednoelementowy i wówczas $G/U = G$. Niech $H = G[N_G[U]]$. Gdyby istniał taki wierzchołek v, że $d_H(v) < 2^{m-1}$, to dla zbioru $U' = U \cup \{v\}$ mielibyśmy $\varepsilon(G/U') \geqslant \frac{|E(G/U)|-2^{m-1}}{|V(G/U)|-1} \geqslant \frac{2^{m-1}(|V(G/U)|-1)}{||V(G/U)|-1|} \geqslant 2^{m-1}$, co przeczyłoby maksymalności zbioru U. Zatem $d(H) \geqslant \delta(H) \geqslant 2^{m-1}$. Na mocy założenia indukcyjnego, w grafie H znajdziemy model topologiczny grafu o r wierzchołkach i $m-1$ krawędziach. Dodając do tego modelu ścieżkę pomiędzy dwoma niesąsiadującymi wierzchołkami (są takie bo $m-1 < \binom{r}{2}$), której wszystkie wewnętrzne wierzchołki są w U, otrzymujemy model topologiczny grafu o r wierzchołkach i m krawędziach. □

Okazuje się, że wystarczy mieć średni stopień $\Omega(r^2)$ aby wymusić $K_r \preccurlyeq_{\text{top}} G$ i to ograniczenie jest asymptotycznie optymalne.

Jak widzimy, minimalne ograniczenia na średni stopień wymuszające minora czy minora topologicznego są dobrze znane. Możemy z nich wywnioskować analogiczne ograniczenia na liczbę chromatyczną.

Ćwiczenie. Każdy graf G o $\chi(G) \geqslant k$ ma podgraf H taki, że $d(H) \geqslant k-1$.

Istnieje więc taka stała c, że jeśli $\chi(G) \geqslant cr\sqrt{\log r}$ to $K_r \preccurlyeq G$. Jedna z najważniejszych hipotez w teorii grafów mówi jednak, że wystarczy liniowe ograniczenie dolne na liczbę chromatyczną.

Hipoteza 3.6 (Hadwiger 1943)**.** *Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego grafu G,*

$$\textit{jeśli } \chi(G) \geqslant r, \textit{ to } K_r \preccurlyeq G.$$

Od lat osiemdziesiątych $\Omega(r\sqrt{\log r})$ było najlepszym znanym ograniczeniem na liczbę chromatyczną wymuszającym K_r-minora. W 2019 roku Norin, Postle i Song opublikowali przełomową pracę—*Breaking the degeneracy barrier for coloring graphs with no K_t minor*—w której pokazują argument potrzebujący jedynie $\chi(G) = \Omega(r(\log r)^\beta)$ dla dowolnego $\beta > 1/4$. Obecnie wiadomo, że wystarczy $\chi(G) = \Omega(r \log\log r)$ aby wymusić $K_r \preccurlyeq G$, co wykazali Delcourt i Postle.

Zbiór wierzchołków S w grafie G jest *niezależny* jeśli żadne dwa wierzchołki w tym zbiorze nie są połączone krawędzią. Moc największego zbioru niezależnego w grafie G oznaczamy przez $\alpha(G)$. *Współczynnikiem niezależności* (ang. *independence ratio*) niepustego grafu G nazywamy stosunek $\frac{\alpha(G)}{|V(G)|}$. W dowolnym właściwym kolorowaniu n-wierzchołkowego grafu c kolorami istnieje n/c wierzchołków w tym samym kolorze i wierzchołki te tworzą zbiór niezależny, więc dla dowolnego grafu G mamy $\alpha(G) \geqslant \frac{|V(G)|}{\chi(G)}$ lub równoważnie $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \leqslant \chi(G)$. Hipoteza Hadwigera implikuje więc, że każdy graf w którym odwrotność współczynnika niezależności wynosi co najmniej r, ma K_r-minor. Pokażemy, że zachodzi to gdy zastąpimy ograniczenie dolne r przez $2r$.

Twierdzenie 3.7 (Duchet, Meyniel)**.** *Dla każdej dodatniej liczby naturalnej r i każdego niepustego grafu G,*

$$\textit{jeśli } \frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \geqslant 2r, \textit{ to } K_r \preccurlyeq G.$$

Dowód. Twierdzenie dowodzimy indukcyjnie względem r. Dla $r = 1$ twierdzenie jest spełnione w trywialny sposób. Załóżmy więc, że $r \geqslant 2$. Niech G będzie grafem takim, że $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} \geqslant 2r$. Zauważmy, że ograniczając się do pewnej spójnej składowej możemy założyć, że G jest spójny. Jest tak, gdyż jeśli G jest sumą rozłączną dwóch niepustych grafów G_1 i G_2, to

$$\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} = \frac{\alpha(G_1)}{\alpha(G_1)+\alpha(G_2)} \cdot \frac{|V(G_1)|}{\alpha(G_1)} + \frac{\alpha(G_2)}{\alpha(G_1)+\alpha(G_2)} \cdot \frac{|V(G_2)|}{\alpha(G_2)},$$

a zatem $\frac{|V(G_i)|}{\alpha(G_i)} \leqslant \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ dla pewnego $i \in \{1, 2\}$

Konstruujemy zbiór niezależny S w G oraz spójny podgraf H w G jak następuje. Najpierw wybieramy dowolny wierzchołek $u \in V(G)$ i bierzemy $S = \{u\}$ oraz $H = G[\{u\}]$. Będziemy iteracyjnie powiększać zbiór S oraz podgraf H utrzymując jako niezmiennik, że S jest zbiorem niezależnym w G, H jest spójny, $S \subseteq V(H)$ oraz $|V(H)| \leqslant 2|S| - 1$. W momencie gdy każdy wierzchołek z $V(G) \setminus S$ sąsiaduje w G z pewnym wierzchołkiem ze zbioru S przerywamy konstrukcję. Załóżmy, że w grafie G istnieje wierzchołek v spoza S który nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem w S. Skoro G jest spójny, to możemy założyć, że odległość v od zbioru S wynosi dokładnie 2, tzn. istnieje ścieżka P o dwu krawędziach której jednym końcem jest v a drugi koniec należy do S. W tym przypadku zastępujemy zbiór S i graf H zbiorem $S \cup \{v\}$ oraz grafem $H \cup P$. Łatwo przekonać się, że po każdym takim kroku zostają zachowane niezmienniki.

W wyniku powyższej konstrukcji otrzymujemy podzbiór wierzchołków S oraz podgraf H grafu G, które spełniają opisane w konstrukcji niezmienniki, a ponadto każdy wierzchołek z $V(G) \setminus V(H)$ ma sąsiada w zbiorze S. Skoro S jest zbiorem niezależnym w G, to $|S| \leqslant \alpha(G)$, a więc

$$|V(H)| \leqslant 2|S| - 1 < 2\alpha(G) \leqslant 2 \cdot \frac{|V(G)|}{2r} = |V(G)|/r.$$

Każdy zbiór niezależny w $G - V(H)$ jest zbiorem niezależnym w G, więc

$$\frac{\alpha(G - V(H))}{|V(G - V(H))|} \leqslant \frac{\alpha(G)}{(1 - 1/r)|V(G)|} = \frac{1}{(r-1)/r} \cdot \frac{\alpha(G)}{|V(G)|} \leqslant \frac{1}{2(r-1)}.$$

Na mocy założenia indukcyjnego w $G - V(H)$ istnieje model grafu K_{r-1}. Model ten możemy rozszerzyć do modelu grafu K_r modelując nowy wierzchołek grafem H, który jest spójny i sąsiaduje ze wszystkimi wierzchołkami w $V(G) \setminus V(H)$. □

Przejdziemy teraz do przykładu zastosowania ograniczeń na stopień wymuszających minor. Dla dwóch zbiorów wierzchołków A i B w grafie G, *A–B ścieżką* nazywamy taką ścieżkę $P = v_0 \dots v_k$, że $V(P) \cap A = \{v_0\}$ i $V(P) \cap B = \{v_k\}$. Zbiór wierzchołków X *separuje* zbiory A i B w G, jeśli każda A–B ścieżka w G zawiera wierzchołek z X. Mówimy wtedy, że X jest *A–B separatorem.*

Twierdzenie 3.8 (Menger 1927)**.** *Niech G będzie grafem i niech A i B będą podzbiorami $V(G)$. Wtedy minimalny rozmiar A–B separatora jest równy maksymalnej liczbie rozłącznych A–B ścieżek.*

Niech G będzie grafem, a $X \subseteq V(G)$ podzbiorem zbioru jego wierzchołków. Mówimy, że X jest *połączony* w G jeśli dla dowolnego $l \geqslant 1$ oraz dla dowolnych różnych wierzchołków $s_1, \dots, s_l, t_1, \dots, t_l$ w X istnieją rozłączne wierzchołkowo ścieżki $P_1, \dots, P_l$ w G takie, że P_i ma końce w s_i i t_i oraz nie ma wierzchołków wewnętrznych w X. Jeśli graf G spełnia $|V(G)| \geqslant 2k$ oraz każdy podzbiór $X \subseteq V(G)$ o mocy co najwyżej $2k$ jest połączony, to mówimy, że G jest *k-połączony.*

Zatem grafy k-połączone są $(2k-1)$-spójne. Okazuje się, że również odpowiednio duża spójność grafu gwarantuje jego k-połączoność.

Twierdzenie 3.9 (Jung, 1970; Larman i Mani 1970)**.** *Istnieje funkcja f taka, że dla każdego $k \geqslant 1$ każdy graf $f(k)$-spójny jest k-połączony.*

Dowód. Niech $f(k) = h(3k) + 2k$, gdzie $h(r)$ jest taką liczbą, że każdy graf o średnim stopniu co najmniej $h(r)$ zawiera K_r jako minor topologiczny. Na mocy propozycji 3.3, możemy wziąć $h(r) = 2^{\binom{r}{2}}$.

Wykażemy, że f spełnia warunek z tezy. Niech G będzie grafem $f(k)$-spójnym. Wówczas G zawiera K_{3k} jako minor topologiczny. Ustalmy model topologiczny grafu K_{3k} w G i niech $U \subseteq V(G)$ będzie zbiorem wierzchołków reprezentujących wierzchołki K_{3k}. Weźmy dowolne różne wierzchołki $s_1, \dots, s_k, t_1, \dots, t_k$ w G. Graf G jest $2k$-spójny, więc na mocy twierdzenia Mengera istnieje rodzina wierzchołkowo rozłącznych ścieżek $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_k\}$ taka, że

- każda ścieżka P_i ma jeden koniec w s_i,

- każda ścieżka Q_i ma jeden koniec w t_i, oraz
- każda ścieżka w $\mathcal{P}$ ma jeden koniec w U i nie ma wierzchołków wewnętrznych w U.

Wybieramy $\mathcal{P}$ w taki sposób, żeby zminimalizować liczbę krawędzi poza ustalonym modelem topologicznym K_{3k}.

Niech $u_1, \dots, u_k$ będą wierzchołkami z U wolnymi od ścieżek w $\mathcal{P}$. Ustalmy $i \in \{1, \dots, k\}$. Niech $u \in U$ będzie końcem P_i w U, a $u' \in U$ końcem Q_i w U. Niech L_i będzie $u_i u$-ścieżką, a M_i będzie $u_i u'$-ścieżką reprezentującymi krawędzie w naszym modelu. Idąc od wierzchołka u_i wzdłuż ścieżki L_i rozważmy pierwszy wierzchołek x_i na tej ścieżce który leży na ścieżce z rodziny $\mathcal{P}$. Twierdzimy, że x_i musi leżeć na ścieżce P_i. W przeciwnym wypadku x_i leży na pewnej ścieżce $X \in \mathcal{P}$ i X nie ma wspólnego końca z L_i. To oznacza, że ścieżka X musi odgałęzić się od ścieżki L_i i pierwsza krawędź X poza L_i będzie krawędzią poza ustalonym modelem K_{3k}. To jednak oznacza, że mogliśmy wybrać rodzinę $\mathcal{P}$ optymalniej kierując ścieżkę X wzdłuż L_i do wierzchołka u_i. Niech y_i będzie analogicznie wybranym przecięciem ścieżki M_i oraz Q_i.

Dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ definiujemy ścieżkę $s_i P_i x_i L_i u_i M_i y_i Q_i t_i$. Rodzina tych ścieżek jest szukanym połączeniem wierzchołków $s_1, \dots, s_k$ z $t_1, \dots, t_k$. $\square$

Powyższy dowód gwarantuje istnienie funkcji $f(k) = O(k^2)$. Wiadomo, że twierdzenie jest prawdziwe dla pewnej liniowej funkcji f.

Twierdzenie 3.10 (Thomas i Wollan, 2005)**.** *Niech G będzie grafem i $k \geqslant 1$. Jeśli G jest $2k$-spójny oraz $d(G) \geqslant 16k$, to G jest k-połączony. Zatem grafy $16k$-spójne są k-połączone.*

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w trzecim rozdziale książki Diestela.

Zakończymy ten rozdział dość zaskakującą na pierwszy rzut oka obserwacją. Otóż możemy zagwarantować dowolnie dużą klikę jako minor już w grafach o minimalnym stopniu 3, jeśli ograniczymy od dołu długość najmniejszego cyklu. Najłatwiej to zobaczyć wymuszając po drodze minor o dużym średnim stopniu a potem aplikując propozycję 3.2.

Długość ścieżki w grafie to liczba krawędzi w tej ścieżce. Zatem ścieżka jednowierzchołkowa ma długość 0. Niech G będzie grafem. *Odległość* pomiędzy dwoma wierzchołkami x i y w G, oznaczana $\mathrm{dist}_G(x, y)$, to długość najkrótszej ścieżki pomiędzy x i y w G, a w przypadku gdy nie ma ścieżki pomiędzy x i y przyjmujemy, że $\mathrm{dist}_G(x, y) = \infty$. W sytuacji gdy kontekst grafu jest jasny będziemy pisać $\mathrm{dist}(x, y)$ zamiast $\mathrm{dist}_G(x, y)$. *Odległość* wierzchołka y od zbioru X dla $X \subseteq V(G)$, to $\min_{x \in X} \mathrm{dist}(x, y)$.

Talią $\mathrm{girth}(G)$ grafu G nazywamy długość najkrótszego cyklu w G (jeśli G nie ma cyklu to talia jest nieskończona).

Lemat 3.11. *Niech d, k będą liczbami naturalnymi i niech $d \geqslant 3$. Niech G będzie grafem o minimalnym stopniu $\delta(G) \geqslant d$ oraz talii $\mathrm{girth}(G) \geqslant 8k+3$. Wtedy G ma minor H o minimalnym stopniu $\delta(H) \geqslant d(d-1)^k$.*

Dowód. Rozważmy maksymalny zbiór X grafu G taki, że $\mathrm{dist}(x,y) > 2k$ dla dowolnych dwu różnych $x, y \in X$. Podzielimy teraz wierzchołki grafu G na drzewa ukorzenione w wierzchołkach z X. Niech $T_x^0 = \{x\}$ dla każdego $x \in X$. Dla dowolnego $i < 2k$, przyjmijmy, że zdefiniowaliśmy rozłączne drzewa T_x^i dla $x \in X$ takie, że w sumie wierzchołki tych drzew to dokładnie wierzchołki w odległości co najwyżej i od X w G. Dla każdego wierzchołka y w odległości dokładnie $i+1$ od X wybierzmy jednego jego sąsiada z w odległości i od X i dodajmy krawędź yz do drzewa w którym jest z. W ten sposób generujemy rodzinę drzew T_x^{i+1} dla $x \in X$. Zauważmy, że każdy wierzchołek grafu G jest w odległości co najwyżej $2k$ od X (z maksymalności zbioru X). Zatem drzewa T_x^{2k} dla $x \in X$, pokrywają wszystkie wierzchołki grafu G.

Niech H będzie minorem G otrzymanym przez kontrakcję drzew T_x^{2k} dla $x \in X$. Pozostaje wykazać, że $\delta(H) \geqslant d(d-1)^k$. Zauważmy najpierw, że każde drzewo T_x^{2k} jest indukowanym podgrafem G. Rzeczywiście, gdyby była jakakolwiek krawędź w G pomiędzy wierzchołkami w $V(T_x^{2k})$, która nie jest w T_x^{2k}, to otrzymalibyśmy cykl w G długości co najwyżej $2k+2k+1$ ale $\mathrm{girth}(G) > 4k+1$, zatem takiej krawędzi nie ma. Podobnie, istnieje co najwyżej jedna krawędź pomiędzy wierzchołkami T_x^{2k} a wierzchołkami T_y^{2k} dla dowolnych różnych $x, y \in X$. Rzeczywiście, gdyby były dwie krawędzie to zamykałyby one cykl w G długości co najwyżej $4k+4k+2$ ale $\mathrm{girth}(G) > 8k+2$, zatem nie ma takich dwu krawędzi. Zatem krawędzie pomiędzy róznymi drzewami T_x^{2k} dla $x \in X$, indukują różne krawędzie w grafie H.

Ile zatem co najmniej jest krawędzi w grafie H? Zauważmy, że dla dowolnego wierzchołka u w T_x^{k-1} każdy spośród $d(u) \geqslant \delta(G) \geqslant d$ sąsiadów u w G musi być w $T_x^k \subseteq T_x^{2k}$. Gdyby pewien taki sąsiad v nalezał do T_y^k dla $y \neq x$ i $y \in X$, to odległość pomiędzy x i y wynosiłaby co najwyżej $2k$, przecząc definicji X. A zatem, każde drzewo T_x^{2k} ma co najmniej $d(d-1)^{k-1}$ liści. Ponieważ każdy liść takiego drzewa wyprowadza co najmniej $d-1$ krawędzi na zewnątrz i każda krawędź świadczy inną krawędź w H dostajemy, że każdy wierzchołek H ma co najmniej $d(d-1)^k$ sąsiadów. $\square$

Powyższy lemat wraz z propozycją 3.2 natychmiast implikują co następuje.

Twierdzenie 3.12 (Thomassen 1983)**.** *Istnieje funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ taka, że dla każdego grafu G i dla każdej liczby naturalnej r,*

$$\textit{jeśli } \delta(G) \geqslant 3 \textit{ i } \mathrm{girth}(G) \geqslant f(r), \textit{ to } K_r \preccurlyeq G.$$

4. Grafy bez ustalonego drzewa jako minoru

Dekompozycją ścieżkową grafu G nazywamy taki ciąg zbiorów $(W_1, \ldots, W_s)$, że spełnione są następujące warunki:

(P1) $W_1 \cup \cdots \cup W_s = V(G)$,
(P2) każda krawędź grafu G ma oba końce w pewnym W_i, oraz
(P3) $W_{i_1} \cap W_{i_3} \subseteq W_{i_2}$ dla dowolnych i_1, i_2, i_3, gdzie $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant s$.

Szerokość dekompozycji ścieżkowej $(W_1, \ldots, W_s)$ wynosi $\max\{|W_i| - 1 : 1 \leqslant i \leqslant s\}$. *Szerokość ścieżkowa* grafu G, oznaczana $\mathrm{pw}(G)$, to najmniejsza szerokość dekompozycji ścieżkowej grafu G. Zauważmy, że jeżeli $(W_1, \ldots, W_s)$ jest dekompozycją ścieżkową grafu G a H jest podgrafem G, to $(W_1 \cap V(H), \ldots, W_s \cap V(H))$ jest dekompozycją ścieżkową grafu H.

Lemat 4.1. *Dla każdej nieujemnej liczby całkowitej n, pełne drzewo ternarne o głębokości n ma szerokość ścieżkową co najmniej n.*

Dowód. Lemat dowodzimy indukcyjnie. Niech T będzie pełnym drzewem ternarnym o głębokości n. Jeśli $n = 0$, to T jest pojedynczym wierzchołkiem i $\mathrm{pw}(T) = 0$. Załóżmy więc, że $n \geqslant 1$ i niech v będzie korzeniem T. Wówczas $T - v$ ma trzy spójne składowe T_1, T_2 i T_3, i każda z nich jest pełnym drzewem ternarnym o głębokości $n-1$. Weźmy dowolną dekompozycję ścieżkową $(W_1, \ldots, W_s)$ drzewa T. Wystarczy teraz pokazać, że pewien zbiór W_i ma rozmiar co najmniej $n+1$.

Bez straty ogólności załóżmy, że $W_1 \neq \emptyset$ i $W_s \neq \emptyset$. Wtedy niech P będzie dowolną W_1–W_s ścieżką (ona istnieje bo T jest spójny). Zauważmy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, s\}$ mamy $W_i \cap V(P) \neq \emptyset$: gdyby dla pewnego indeksu i mielibyśmy $W_i \cap V(P) = \emptyset$, to otrzymalibyśmy podział zbioru $V(P)$ na dwa niepuste zbiory $(W_1 \cup \cdots \cup W_{i-1}) \cap V(P)$ i $(W_{i+1} \cup \cdots \cup W_s) \cap V(P)$ między którymi nie ma żadnej krawędzi, co przeczyłoby spójności P.

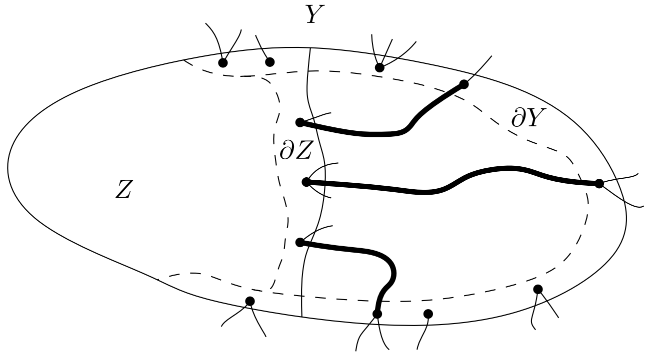
Ścieżka P przecina co najwyżej dwa drzewa T_1, T_2 i T_3, więc bez straty ogólności załóżmy, że $V(P) \cap V(T_1) = \emptyset$. Na mocy założenia indukcyjnego, szerokość indukowanej dekompozycji ścieżkowej $(W_1 \cap V(T_1), \ldots, W_s \cap V(T_1))$ drzewa T_1 wynosi co najmniej $n-1$, a więc istnieje takie $i \in \{1, \ldots, s\}$, że $|W_i \cap V(T_1)| \geqslant n$. Ponieważ W_i zawiera wierzchołek ze ścieżki P i $V(P) \cap V(T_1) = \emptyset$, to dostajemy $|W_i| \geqslant n+1$ i P. To kończy dowód indukcyjny. □

Twierdzenie 4.2. *Jeśli* $\mathrm{pw}(G) \geqslant n$, *to każdy $(n+1)$-wierzchołkowy las jest minorem grafu G.*

Zanim przejdziemy do dowodu powyższego twierdzenia, musimy wprowadzić parę oznaczeń.

Brzegiem zbioru wierzchołków X w grafie G nazywamy zbiór ∂X składający się ze wszystkich tych wierzchołków w X, które są połączone krawędzią z jakimkolwiek wierzchołkiem spoza X w G. Mówimy, że zbiór wierzchołków X jest *n-rozkładalny* w G jeśli istnieje taka dekompozycja ścieżkowa $(W_1, \ldots, W_s)$ grafu $G[X]$, że $\partial X \subseteq W_s$ oraz szerokość dekompozycji jest mniejsza niż n (czyli $|W_i| \leqslant n$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$). Dekompozycję tę nazywamy *częściową dekompozycją ścieżkową* grafu G. Jako że $\partial(V(G)) = \emptyset$, mamy $\mathrm{pw}(G) < n$ wtedy i tylko wtedy gdy zbiór $V(G)$ jest n-rozkładalny w G.

Lemat 4.3. *Niech Y będzie n-rozkładalnym zbiorem w grafie G i niech $Z \subseteq Y$. Jeżeli istnieje $|\partial Z|$ rozłącznych Z–∂Y ścieżek w G, to Z jest n-rozkładalny. Patrz rysunek 9.*



Rysunek 9. Zbiór $Z \subseteq Y$ w którym $|\partial Z| = 6$. Sześć $Z - \partial Y$ ścieżek (w tym 3 trywialne).

Dowód. Niech $(W_1, \ldots, W_s)$ będzie częściową dekompozycją ścieżkową grafu G świadczącą to, że zbiór Y jest n-rozkładalny. Dla każdego $i \in \{1, \ldots, s\}$, definiujemy zbiór W_i' jako

$$W_i' = ((W_1 \cup \cdots \cup W_i) \cap \partial Z) \cup (W_i \cap Z).$$

Pokażemy, że $(W_1', \ldots, W_s')$ jest częściową dekompozycją ścieżkową która świadczy o tym, że zbiór Z jest n-rozkładalny. Najpierw uzasadnimy, że jest to dekompozycja ścieżkowa grafu $G[Z]$. Warunki (P1) i (P2) wynikają z tego, że $W_i \cap Z \subseteq W_i' \subseteq Z$ dla $i \in \{1, \ldots, s\}$ oraz $(W_1, \ldots, W_s)$ jest dekompozycją ścieżkową nadgrafu grafu $G[Z]$. Dla dowodu (P3), niech $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant s$. Wówczas

$$\begin{aligned}(W_{i_1}' \cap W_{i_3}') \cap \partial Z &= (W_{i_1}' \cap \partial Z) \cap (W_{i_3}' \cap \partial Z)\\ &\subseteq (W_1 \cup \cdots \cup W_{i_1}) \cap \partial Z\\ &\subseteq (W_1 \cup \cdots \cup W_{i_2}) \cap \partial Z \subseteq W_{i_2}',\end{aligned}$$

oraz skoro $(W_1, \ldots, W_s)$ spełnia (P3), to

$$(W_{i_1}' \cap W_{i_3}') \setminus \partial Z \subseteq W_{i_1} \cap W_{i_3} \cap Z \subseteq W_{i_2} \cap Z \subseteq W_{i_2}'.$$

Zatem $W_{i_1}' \cap W_{i_3}' \subseteq W_{i_2}'$, czyli warunek (P3) jest spełniony. Faktycznie więc $(W_1', \ldots, W_s')$ jest dekompozycją ścieżkową grafu $G[Z]$.

Mamy $\partial Z = (W_1 \cup \cdots \cup W_s) \cap \partial Z \subseteq W_s'$, więc pozostaje pokazać, że szerokość dekompozycji $(W_1', \ldots, W_s')$ jest mniejsza niż n. Niech $\mathcal{P}$ będzie rodziną $|\partial Z|$ rozłącznych Z–∂Y ścieżek w G. Zauważmy, że każda ścieżka w $\mathcal{P}$ ma koniec w ∂Z; istotnie, jeśli taka ścieżka jest trywialna, to jej jedyny wierzchołek leży w $Z \cap \partial Y \subseteq \partial Z$, a jeśli jest nietrywialna, to jej koniec w Z jest w ∂Z. Ponieważ $|\mathcal{P}| = |\partial Z|$, stąd wiemy że każdy element ∂Z jest końcem pewnej ścieżki z $\mathcal{P}$.

Rozważmy $i \in \{1, \ldots, s\}$. Zauważmy, że każda ścieżka w $\mathcal{P}$ która ma koniec w $(W_1 \cup \cdots \cup W_i) \cap \partial Z$ przecina W_i a nawet $W_i \setminus (Z \setminus \partial Z)$. Rzeczywiście, taka ścieżka ma jeden koniec w $W_1 \cup \cdots \cup W_i$ a drugi koniec w $\partial Y \subseteq W_s$, a zatem musi mieć element w W_i (a ponieważ jest to $Z - \partial Y$-ścieżka, to nie może mieć elementu w $Z \setminus \partial Z$). Ponieważ ścieżki w $\mathcal{P}$ są rozłączne, mamy

$$n \geqslant |W_i| \geqslant |(W_1 \cup \cdots \cup W_i) \cap \partial Z| + |W_i \cap (Z \setminus \partial Z)| = |W_i'|.$$

Zatem $(W_1', \ldots, W_s')$ ma szerokość mniejszą niż n. To dowodzi, że zbiór Z jest n-rozkładalny. □

Mówimy, że model ϕ grafu H w G jest *ukorzeniony* w zbiorze wierzchołków A jeśli $|V(\phi(u)) \cap A| = 1$ dla każdego $u \in V(H)$.

Dowód twierdzenia 4.2. Niech G będzie grafem spełniającym $\mathrm{pw}(G) \geqslant n$ i niech F będzie $(n+1)$-wierzchołkowym lasem. Niech $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ będzie takim uporządkowaniem wierzchołków lasu F, że każdy wierzchołek v_{i+1} sąsiaduje z co najwyżej jednym wierzchołkiem ze zbioru $\{v_1, \ldots, v_i\}$. Indukcyjnie dla każdego $i \in \{0, \ldots n+1\}$ pokażemy, że istnieje taki zbiór wierzchołków X^i oraz model ϕ^i lasu $F[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ w $G[X^i]$, że jeśli $i \leqslant n$, to

(i) model ϕ^i jest ukorzeniony w ∂X^i
(ii) X^i jest maksymalnym na inkluzję zbiorem, który jest n-rozkładalny i spełnia $|\partial X^i| \leqslant i$.

W szczególności powyższe warunki implikują, że $|\partial X_i| = i$. Jako X^0 możemy wybrać dowolny maksymalny na inkluzję n-rozkładalny zbiór spełniający $|\partial X^0| = 0$ (być może $X^0 = \emptyset$; ogólnie X^0 to zbiór wierzchołków wszystkich spójnych składowych G o szerokości ścieżkowej mniejszej niż n). Załóżmy, że dla pewnego $i \in \{0, \ldots, n\}$ zdefiniowaliśmy już X^i i niech ϕ będzie modelem lasu $F[\{v_1, \ldots, v_i\}]$ w $G[X^i]$ ukorzenionym w ∂X^i. Skoro $\mathrm{pw}(G) \geqslant n$, to zbiór $V(G)$ nie jest n-rozkładalny, więc $X^i \neq V(G)$. Jeśli v_{i+1} nie sąsiaduje z żadnym wierzchołkiem ze zbioru $\{v_1, \ldots, v_i\}$, to niech x będzie dowolnym wierzchołkiem ze zbioru $V(G) \setminus X^i$. Jeśli zaś v_{i+1} sąsiaduje z pewnym takim v_j, że $j \leqslant i$, to niech x będzie dowolnym nienależącym do X^i sąsiadem jedynego wierzchołka w zbiorze $V(\phi(v_j)) \cap \partial X^i$. Jeżeli $i = n$, to możemy wziąć $X^{i+1} = V(G)$ oraz model ϕ^{i+1} zdefiniowany przez $\phi^{i+1}(v_j) = \phi^i(v_j)$ dla $j \leqslant i$ oraz $\phi^{i+1}(v_{i+1}) = G[\{x\}]$.

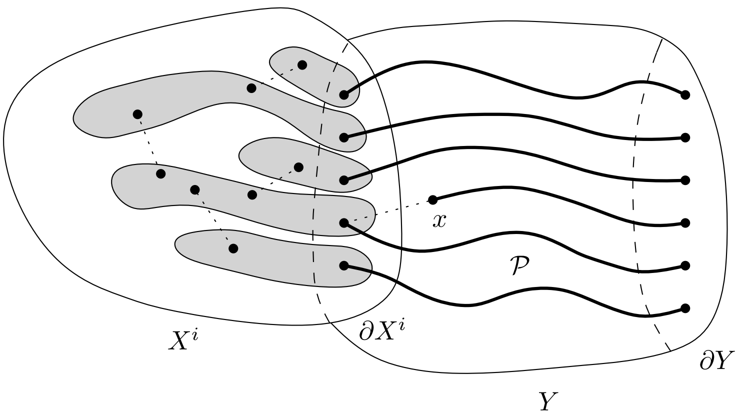
Załóżmy więc, że $i \leqslant n-1$ i pokażmy, że istnieją X^{i+1} oraz ϕ^{i+1} spełniające warunki (i) i (ii). Zdefiniujmy

$$X := X^i \cup \{x\}.$$

Patrz rysunek 10. Jeśli $(W_1, \ldots, W_s)$ jest częściową dekompozycją ścieżkową świadczącą n-rozkładalność zbioru X^i, to $(W_1, \ldots, W_s, \partial X^i \cup \{x\})$ jest częściową dekompozycją ścieżkową świadczącą n-rozkładalność zbioru X. Zatem na mocy (ii), mamy $|\partial X| > i$. Skoro jednak $\partial X \subseteq \partial X^i \cup \{x\}$, to musi zachodzić $|\partial X| = |\partial X^i \cup \{x\}| = i+1$. Niech Y będzie maksymalnym na inkluzję nadzbiorem zbioru X który jest n-rozkładalny i spełnia $|\partial Y| \leqslant i+1$. Zbiór Y będzie naszym X^{i+1}.

Niech $\mathcal{P}$ będzie największą rodziną rozłącznych X–∂Y ścieżek w G. Twierdzimy, że $|\mathcal{P}| \geqslant i+1$ (czyli $|\mathcal{P}| = |\partial Y| = i+1$). Załóżmy dla dowodu nie wprost, że $|\mathcal{P}| \leqslant i$. Na mocy twierdzenia Mengera istnieje taki X–∂Y separator S, że $|S| = |\mathcal{P}|$, więc z definicji separatora, każdy wierzchołek w S należy do jednej ścieżki w $\mathcal{P}$. Skoro $X \subseteq Y$, to każda X–∂Y ścieżka ma wszystkie wierzchołki w Y, więc $S \subseteq Y$. Niech Z będzie sumą zbioru S oraz zbiorów wierzchołków tych spójnych składowych grafu $G - S$ które zawierają co najmniej jeden wierzchołek z X. Wówczas $\partial Z = S$. Skoro S jest X–∂Y separatorem i $S \subseteq Y$, mamy $Z \subseteq Y$. Z każdej z $|\partial Z| = |S|$ ścieżek w $\mathcal{P}$ możemy wybrać podścieżkę od S do ∂Y, więc na mocy lematu 4.3 zbiór Z jest n-rozkładalny. Skoro jednak $X^i \subsetneq X \subseteq Z$, dostajemy sprzeczność z warunkiem (ii).

Faktycznie więc $|\mathcal{P}| = i + 1$. Skoro $X \subseteq Y$, każda X–∂Y ścieżka ma koniec w ∂X. Niech $P_1, \ldots, P_{i+1}$ będą ścieżkami w $\mathcal{P}$ przy czym $V(\phi^i(v_k)) \cap V(P_k) \neq \emptyset$ dla $k \in \{1, \ldots, i\}$. Wtedy mamy $x \in V(P_{i+1})$. Definiujemy $X^{i+1} = Y$ oraz $\phi^{i+1}(v_k) = \phi^i(v_k) \cup P_k$ dla $k \in \{1, \ldots, i\}$, zaś $\phi^{i+1}(v_{i+1}) = P_{i+1}$. □



Rysunek 10. Krok w konstrukcji minoru lasu.