Zadania domowe

Maksymalna liczba punktów do zdobycia za ten zestaw wynosi 10.

Termin wysyłania rozwiązań mija 21 marca o godzinie 23:59.

Zadanie 1 (3 punkty)**.** Wykazać, że jeśli G jest grafem o minimalnym stopniu δ, to $\mathrm{tw}(G) \geqslant \delta$.

Zadanie 2 (3 punkty)**.** Niech $\mathcal{C}$ będzie klasą grafów, k nieujemną liczbą całkowitą, a $\mathcal{C}'$ klasą wszystkich grafów G dla których istnieje taki zbiór $F \subseteq E(G)$, że $|F| \leqslant k$ oraz $G - F \in \mathcal{C}$. Dla jakich wartości k klasa $\mathcal{C}'$ jest zamknięta na branie minorów jeśli klasa $\mathcal{C}$ jest

(a) klasą wszystkich lasów?
(b) klasą wszystkich grafów planarnych?

Zadanie 3 (3 punkty)**.** *Schronem* w grafie G nazywamy taki poset $(\mathcal{S}, \subseteq)$ złożony z podgrafów grafu G i uporządkowany relacją bycia podgrafem, że

(i) każdy graf w $\mathcal{S}$ jest niepusty i spójny,
(ii) dla każdego $H \in \mathcal{S}$ który nie jest minimalny w posecie $(\mathcal{S}, \subseteq)$ i dla każdego $x \in V(H)$ istnieje taki $H' \in \mathcal{S}$ pokryty przez H, że $x \notin V(H')$.

(Przypomnijmy, że element a jest *pokryty* przez element b w posecie, jeśli $a < b$, ale nie istnieje taki element c, że $a < c < b$.)

Grubość schronu to minimalna wielkość łańcucha maksymalnego w schronie.

Wykazać, że głębokość drzewiasta grafu jest równa największej grubości schronu w tym grafie.

Wskazówka: Skonstruować taką grę dwuosobową na grafie G, że schrony odpowiadają strategiom jednego gracza, a lasy eliminacji strategiom drugiego gracza.

Zadanie 4 (3 punkty)**.** *Podziałem drzewiastym* grafu G nazwiemy parę $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ gdzie T jest drzewem a $X_t \subseteq V(G)$ oraz dodatkowo

(i) rodzina zbiorów $\{X_t\}_{t \in V(T)}$ stanowi podział $V(G)$ (i.e. $V(G) = \bigcup_{t \in V(T)} X_t$ oraz $X_s \cap X_t = \emptyset$ dla $s \neq t$),
(ii) dla dowolnych dwóch wierzchołków u, v połączonych krawędzią w G niech s, t będą węzłami T takimi że $u \in X_t, v \in X_s$; wtedy albo $s = t$ albo $st \in E(T)$.

Szerokość podziału drzewiastego $(T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ to $\max_{t \in V(T)} |X_t|$.

Pokaż, że istnieje stała c taka, że dla dowolnego grafu G o szerokości drzewiastej k i maksymalnym stopniu Δ istnieje podział drzewiasty grafu G o szerokości co najwyżej $c\Delta k$.