Zadania domowe

Maksymalna liczba punktów do zdobycia za ten zestaw wynosi 10.

Termin wysyłania rozwiązań mija 11 kwietnia o godzinie 23:59.

Zadanie 1 (3 punkty)**.** *Pasmem* (ang. *bandwidth*) grafu G nazywamy najmniejszą liczbę naturalną k dla której da się znaleźć takie uporządkowanie $v_1, \ldots, v_n$ wierzchołków grafu G, że dla każdej krawędzi $v_i v_j$ grafu G mamy $|i - j| \leqslant k$. Liczbę tę oznaczamy przez $\mathrm{bandwidth}(G)$. Wykazać, że dla każdego grafu G mamy $\mathrm{pw}(G) \leqslant \mathrm{bandwidth}(G)$, ale nie istnieje taka funkcja f, że dla każdego grafu G zachodzi $\mathrm{bandwidth}(G) \leqslant f(\mathrm{pw}(G))$.

Zadanie 2 (3 punkty)**.** W problemie Odd Cycle Transversal dostajemy na wejściu graf G, a naszym zadaniem jest zwrócenie rozmiaru najmniejszego zbioru $X \subseteq V(G)$ takiego, że $G \setminus X$ nie zawiera cyklu nieparzystej długości.

Pokaż, że dostając na wejściu graf G wraz z jego dekompozycją drzewiastą szerokości t jesteśmy w stanie rozwiązać problem Odd Cycle Transversal w czasie $\mathcal{O}(3^t t^c |V(G)|)$ dla pewnej stałej c.

Zadanie 3 (3 punkty)**.** Wykazać, że jeśli G jest grafem bez K_t-minoru, to istnieje taki podzbiór X więcej niż połowy wierzchołków grafu G, że $\chi(G[X]) \leqslant t$.

Zadanie 4 (3 punkty)**.** *Mocną jeżyną* w grafie G nazywamy rodzinę $\mathcal{B} \subseteq 2^{V(G)}$ spełniającą następujące warunki:

(i) dla każdego $B \in \mathcal{B}$, podgraf indukowany prez B w G jest spójny;
(ii) dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, mamy $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$.

Oczywiście każda mocna jeżyna jest też jeżyną w G. *Rząd* mocnej jeżyny $\mathcal{B}$ to jej rząd jako jeżyny (czyli rozmiar najmniejszego zbioru $X \subseteq V(G)$ takiego, że dla każdego $B \in \mathcal{B}$ mamy $X \cap B \neq \emptyset$). Największy możliwy rząd mocnej jeżyny w G oznaczamy $\mathrm{bn}'(G)$.

Pokaż, że dla dowolnego grafu G mamy

$$\mathrm{bn}'(G) \leqslant \mathrm{bn}(G) \leqslant 2\,\mathrm{bn}'(G).$$

Dodatkowo, pokaż przykład ciągu grafów G_n dla którego $\lim_{n\to\infty} \mathrm{bn}(G_n)/\mathrm{bn}'(G_n) = 2$.